

Devoir surveillé n°5

Rappel de quelques consignes de présentation :

- tracer un cartouche et une marge à gauche,
- passer une ligne entre deux questions et bien les numéroté,
- écrire lisiblement et sans ratures,
- encadrer les réponses aux questions.

Exercice 1 : Question de cours, 3 points

1. Donner la formule permettant le calcul de $\binom{n}{k}$ sous la forme d'un quotient comportant des factorielles.
2. Donner la formule de Pascal.
3. Démontrer la formule de Pascal par la méthode que vous choisirez.

Exercice 2 : QCM, 3 points

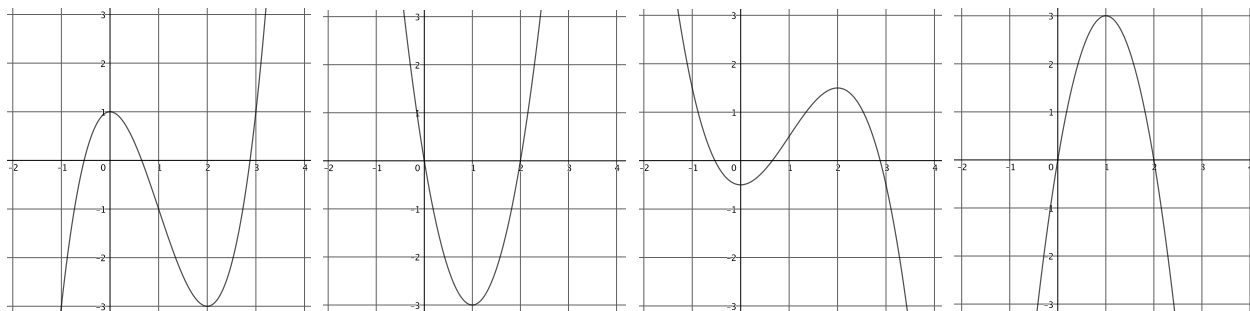
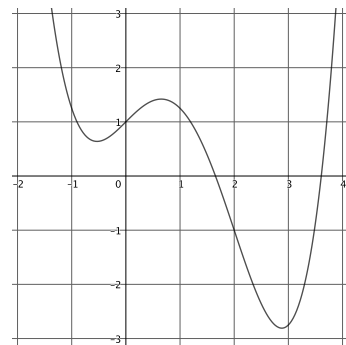
Pour chaque question, il y a une et une seule bonne réponse.

Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, pas de réponse ou une réponse multiple ne rapporte aucun point.

A)

On donne la courbe représentative d'une fonction f deux fois dérivable.

Parmi les courbes suivantes choisissez celle qui représente la dérivée seconde f'' de f .



1.

2.

3.

4.

B) 15 personnes attendent pour monter dans un ascenseur qui peut en transporter 10. Parmi les 15 personnes, il y a trois membres de la même famille qui ne se sépareront pas.

Quel calcul donne le nombre de groupes différents qui peuvent monter dans l'ascenseur ?

1. $\frac{15 \times 14 \times \dots \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}$ 2. $\binom{15}{10} - \binom{10}{3}$ 3. $\binom{12}{7} + \binom{12}{10}$ 4. $\binom{15}{10} - \binom{15}{3}$

C) Dans une classe de 33 élèves, 20 élèves étudient l'anglais, 10 l'espagnol et parmi les élèves qui étudient l'anglais 13 n'étudient pas l'espagnol.

Combien étudient l'espagnol mais pas l'anglais ?

1. 7

2. On ne peut pas savoir

3. 0

4. 3

Exercice 3 : 2 points

En utilisant la convexité de la fonction \exp , montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ on a :

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + x(e - 1)$$

Exercice 4 : 4 points

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^x(x^2 - 3x + 2)$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de f .
3. Étudier la convexité de f (c'est à dire, déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave) et préciser les éventuels points d'inflexion de \mathcal{C}_f .

Exercice 5 : 4 points

Soient n et p deux entiers tels que : $2 \leq n$ et $0 \leq p \leq n - 2$.

Montrer l'égalité :
$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}$$

On pourra choisir l'une ou l'autre des deux méthodes suivantes :

- Des calculs rigoureux.
- Roméo et Juliette sont parmi les n invités d'un bal. Pendant la soirée, exactement p convives ont consommé de la sangria.
Dénombrer de deux manières les différents groupes d'amateurs de sangria possibles.

Exercice 6 : 4 points

On dispose d'un jeu de 32 cartes. Déterminer :

1. Le nombre de mains de 8 cartes.
2. Le nombre de mains de 8 cartes contenant une dame et une seule.
3. Le nombre de mains de 8 cartes contenant exactement 3 cœurs.
4. Le nombre de mains de 8 cartes contenant une dame (exactement) et 3 cœurs (exactement).
5. Le nombre de mains de 8 cartes ne contenant aucun roi.
6. Le nombre de mains de 8 cartes contenant au moins un roi.