DS4 - Corrigé

Certains calculs intermédiaires sont omis dans ce corrigé. Ils doivent figurer dans une copie !

Exercice 1 : Question de cours, 3 points

Solution : apprendre le cours.

Plus précisément, pour ces questions, on trouvera les réponses aux pages 6 et 7 du cours de géométrie.

Exercice 2 : Deux droites

On dispose des représentations paramétriques de deux droites :

$$(d) : \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -t & + & 1 \\ y & = & 2t & - & 2 \\ z & = & t & - & 4 \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad (d') : \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 2u & - & 1 \\ y & = & -5u & & \\ z & = & 3u & + & 2 \end{array}\right. \quad (u \in \mathbb{R})$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}(-1, 2, 1)$ est un vecteur directeur de (d) et le vecteur $\overrightarrow{u'}(2, -5, 3)$ est un vecteur directeur de (d'). Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc ils ne sont pas colinéaires ainsi (d) et (d') ne sont pas parallèles.

Il reste à montrer qu'elles ne sont pas sécantes. On résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -t & + & 1 & = & 2u & - & 1 \\ 2t & - & 2 & = & -5u & & \\ t & - & 4 & = & 3u & + & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} -t & - & 2u & = & -2 \\ 2t & + & 5u & = & 2 \\ t & - & 3u & = & 6 \end{array}\right.$$

On opère les combinaisons : $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} t & - & 2u & = & -2 \\ & & u & = & -2 \\ & - & 5u & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} t & - & 2u & = & -2 \\ & & u & = & -2 \\ & & 10 & = & 4 \end{array}\right.$$

Le système n'a pas de solution donc les droites ne sont pas sécantes.

$$\boxed{\text{Les droites } (d) \text{ et } (d') \text{ ne sont ni sécantes ni parallèles donc elles ne sont pas coplanaires.}}$$

Exercice 3

On a $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 2e^x$.

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ ainsi $u(x) > 0$.

Par ailleurs, u est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ ainsi elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$u'(x) = 2x + 2e^x$$

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x + 2e^x}{2\sqrt{x^2 + 2e^x}} = \boxed{\frac{x + e^x}{\sqrt{x^2 + 2e^x}}}$$

On a $g(x) = \dfrac{x}{e^{x^2}+1}$ ainsi g est une fonction quotient.
La seule difficulté est de dériver $u(x) = \mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{v(x)}$ avec $v(x) = x^2$ donc $v'(x) = 2x$.
On sait que v est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc u l'est aussi et $u'(x) = v'(x)\mathrm{e}^{v(x)} = 2x\mathrm{e}^{x^2}$.
En appliquant la formule de dérivation d'un quotient, il vient alors :

$$g'(x) = \frac{1 \times (e^{x^2}+1) - x \times 2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)^2} = \frac{e^{x^2} - 2x^2e^{x^2}+1}{(e^{x^2}+1)^2}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{(1-2x^2)e^{x^2}+1}{(e^{x^2}+1)^2}}$$

Exercice 4 : Une limite

On doit déterminer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(2x-1)^n - 1}{x-1}$ où n est un entier non nul fixé.
Cette limite est celle d'un taux d'accroissement :
Soit f définie par $f(x) = (2x-1)^n$, on a $f(1) = 1$ ainsi $\dfrac{(2x-1)^n-1}{x-1} = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.
f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en $a = 1$ ainsi $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$.
Or $f'(x) = n \times 2 \times (2x-1)^{n-1}$ d'où $f'(1) = 2n$, il vient alors :

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{(2x-1)^n-1}{x-1} = 2n}$$

Exercice 5 : Étude d'une section

1. Voir figure.
2. On utilise la relation de Chasles et les propriétés de la figure :

$\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{LG} + \overrightarrow{GP}$ or $\overrightarrow{LG} = \overrightarrow{GF}$ car L est le symétrique de F par rapport à G,
$= \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GP}$ or $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HE}$ car FGHE est un carré donc un parallélogramme,
$= \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HP}$ or $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HG}$ par hypothèse.
$= \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{GH} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{GH} - \frac{1}{3}\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{EH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GH}$

$$\boxed{\overrightarrow{LP} = -\overrightarrow{EH} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{GH}}$$

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP}$ or $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$ car M est le milieu de [EH],
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HP}$ or $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HG}$ par hypothèse.
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} - \frac{1}{3}\overrightarrow{GH}$

$$\boxed{\overrightarrow{MP} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{EH} - \tfrac{1}{3}\overrightarrow{GH}}$$

3. D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{LP} = -\frac{1}{2}(-\overrightarrow{EH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GH}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} - \frac{1}{3}\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{MP}$$

On en déduit que $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{LP}$ sont colinéaires ainsi $\boxed{\text{L, M et P sont alignés}}$

4. (a) Les points L, I, C et G sont tous dans le plan (CGF) ainsi pour montrer que (LI) et (CG) sont sécantes il suffit de prouver qu'elles ne sont pas parallèles.
   On va le démontrer, par l'*absurde*.
   ABCDEFGH est un cube donc BCGF est un carré ainsi (BF) est parallèle à (CG). On en déduit que si (LI) était parallèle à (CG) elle serait aussi parallèle à (BF) ce qui est *absurde* car (LI) coupe (BF) en I.

   Ceci prouve donc que $\boxed{\text{(LI) et (CG) sont sécantes}}$

   Voir figure pour la construction du point d'intersection K.

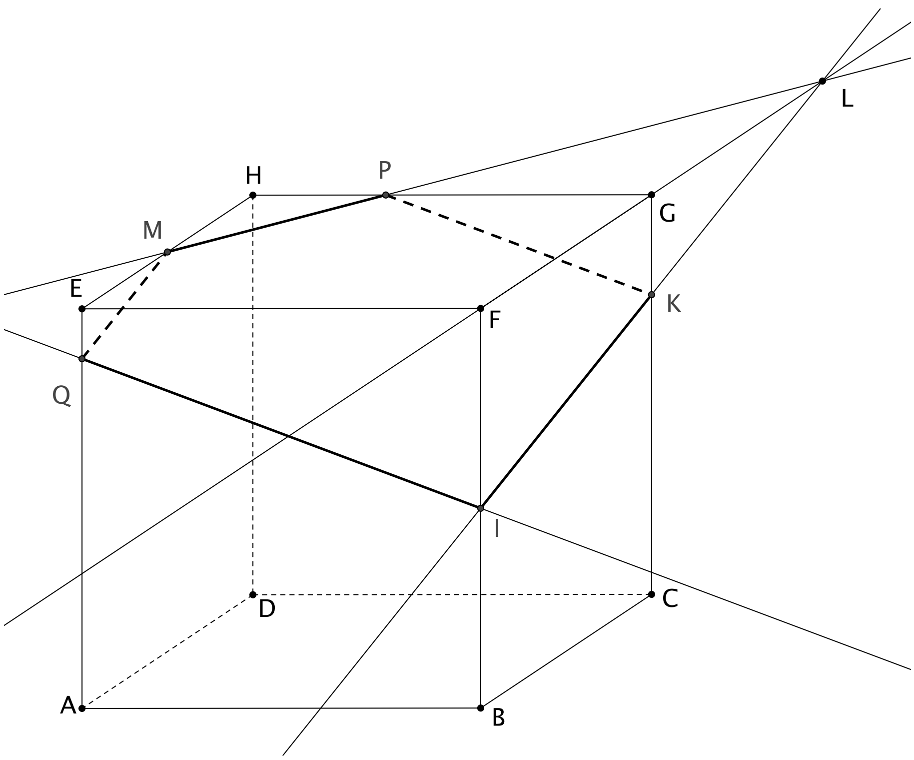
   (b) D'après le résultat de la question 3., le point L est sur la droite (MP) donc il est sur (MPI). On en déduit que $(LI) \subset (MPI)$ puis que K, qui appartient à (LI), est sur (MPI).

   Les points P et K sont tous deux simultanément sur (MPI) et (CGH) ainsi :

   $\boxed{\text{l'intersection de (MPI) et (CGH) est la droite (PK)}}$

   (c) ABCDEFGH est un cube, donc les plans (BFE) et (CGH) sont parallèles et on sait aussi que (MPI) coupe (CGH) selon la droite (KP). On en déduit, d'après le théorème de section des plans parallèles que (MPI) coupe (BFE) selon une droite parallèle à (KP). Or cette droite contient le point I car ce point est simultanément sur (MPI) et sur (BFE). On trace donc la parallèle à (KP) passant par I.
   Voir figure pour la construction.
   Montrer que le plan (MPI) coupe le plan (BFE) selon une droite parallèle à (KP). Construire cette droite et son point d'intersection Q avec (EA).

   (d) D'après les résultats des questions précédentes, les points M, P, K, I et Q sont sur les faces du cubes et aussi sur le plan (MPI). La section du cube par ce plan est donc représentée par le polygone MPKIQ.



Exercice 6 : 4 points

1. Pour montrer que les vecteurs $\vec{u}(1,2,-4)$, $\vec{v}(2,3,-2)$ et $\vec{w}(2,4,-7)$ forment une base de l'espace, il suffit de montrer qu'ils ne sont pas coplanaires. Pour cela, on va montrer que l'égalité $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$ n'est vraie que pour $a=b=c=0$.
   Coordonnée par coordonnée l'égalité $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$ est équivalente au système :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \underline{a} & +2b & +2c & = & 0 \\ 2a & +3b & +4c & = & 0 \\ -4a & -2b & -7c & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3+4L_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{cccc} a & +2b & +2c & =0 \\ & -b & & =0 \\ & 6b & +c & =0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} a & +2b & +2c & =0 \\ & b & & =0 \\ & & c & =0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} a & & & =0 \\ & b & & =0 \\ & & c & =0 \end{array}\right.$$

   Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires, ils forment donc une base de l'espace.

2. Pour montrer que les vecteurs $\vec{u}(1,1,2)$, $\vec{v}(2,-2,5)$ et $\vec{w}(1,-7,4)$ sont coplanaires, on cherche des nombres a,b et c, non tous nuls, tels que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$.
   Coordonnée par coordonnée l'égalité $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$ est équivalente au système :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \underline{a} & +2b & +c & = & 0 \\ a & -2b & -7c & = & 0 \\ 2a & +5b & +4c & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3-2L_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{cccc} a & +2b & +2c & =0 \\ & -4b & -8c & =0 \\ & b & +2c & =0 \end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2+4L_3}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} a & +2b & +2c & =0 \\ & & 0 & =0 \\ & b & +2c & =0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

   On constate maintenant que pour $c=1$, on a $b=-2$ et $a=3$ ce qui montre que :

   $\boxed{\text{les vecteurs } \vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont reliés par la relation } 3\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}\text{, ils sont donc coplanaires}}$

DS4		Ex 1	1.	2.	3.	Ex 2	non paral.	non sec	Ex 3	1.	2	Ex 4	1.	Ex 5	1.	2.	3.	4.(a)	4.(b)	4.(c)	4.(d)	Ex 6	1.	2.	Total
			1,00	**1,00**	**1,00**		**1,00**	**2,00**		**1,50**	**1,50**		**2,00**		**1,00**	**1,00**	**1,00**	**0,50**	**1,00**	**1,00**	**1,00**		**2,00**	**2,00**	21,5
1			0	1	1		0	0		1,5	1		0,5		1	0,5	0	0	0	0,25				0,5	7,25
2			1	0,5	1		0	2		1,5	1		0,5		1	1	0	0	0	0	0		1	0	10,5
3			0	1	0,5		0	1		1,5	1,5		0		1	1					1		2		10,5
4			0	0	0		0	1		1,5	1,5		0		1	0,5	0	0					2	0,5	8
5			0	0	0		0	2		1,5	0,5				1	1	1				0,5		1,5		9
6			0	1	0,5		0	1		1,5	0,5		0,5		1	0,75	1	0	0	0,5	1		1,5		10,75
7			0	0	0,5		0	1		1,5	0,5				1	0,5	1	0	0		0				6
8			0,5	1	1		1	2		1,5	1,5		2		1	1	1	0	1	0,25	0,75		2	2	19,5
9			1	1	1		0,5	0		1,5	1				1	1	1	0,25			0			1	10,25
10			1	1	1		0	2		1,5	0		0		1	0,5	0	0,25	0	0	0			0	8,25
11			0	1	0,5		0	1,5		1,5	1,5		0		1	1	0,5	0	0	0	0				8,5
12			0	1	1		1	1,5		1,5	1,5				1	1	0	0,5	0	0,25			1,5	1,5	13,25
13			1	1	0		1	2		1,5	1,5		1		1	0,75	1	0	0		0,5			1,5	13,75
14			1	1	1		1	2		1,5	1,5		1,5		1	1	1	0	1	0,25	0		1,5	0,5	16,75
15			0	0	0		1	2		1,5	1,5		0		1	0,5	1	0,25	0	0	0		1,5	2	12,25
16			1	1	1		1	2		1,5	1,5		2		1	1	1	0	0		1		1,5	1	17,5
17			0	1	1		1	1,5		1	0,5				1	1	1	0,25		0,75					10
18			0	0	1		1	1,5		1,5	1		1,5		1	1	1	0	0		0		1,5	0,5	12,5
19			0	0	0		0	0,5		1	0,5		0,5		1	1		0	0		0			0	4,5
20			0	1	1		1	2		1,5	0,5		2		1	1	1	0,25	0,75	1	1				15
21			0,5	1	1		1	2		1,5	1,5		2		1	1	1	0,25	1	1	1		2	2	20,75
22			1	1	1		1	1,5		1,5	1,5		0,5		1	1	1	0	0	0	0		1	2	15
23			1	1	1		1	1,5		1,5	1,5		1,5		1	1	1	0,5	0	0,25	1		2	2	18,75
24			1	1	0		0,5	2		1	0,5				1	0,5	0	0	0		0		0	0	7,5
25			0,5	1	1		0	0,5		1,5	1		0		1	0,5	0	0,25	0	0	0				7,25
26			0,5	1	1		1	2		1,5	1,5				1	1	1	0			0				11,5
27			0	1	1		1	1,5		1,5	1,5		1,5		1	1	0	0	1	0,5	1		0	0	13,5
28			1	1	1					1	1		2		1	0,5	1	0	0	1	1				11,5
29			1	0,5	0,5		0,5	1		1	0		0		1	0,75	1	0	0	0	0		1	2	10,25
30			0,5	1	1		1	2		1,5	1		2		1	1	1	0,25	1	0,5	1			2	17,75
31			0,5	1	1		0,25	2		1,5	0,5		0,5		1	1	0,75	0,25	0	0	1		1	0	12,25
32			1	1	1		1	2		1,5	1,5		0		1	1	1	0,25	0		0		2	2	16,25
moy																									12,07