Devoir surveillé n°4

Rappel de quelques consignes de présentation :

- tracer un cartouche et une marge à gauche,
- passer une ligne entre deux questions et bien les numéroter,
- écrire lisiblement et sans ratures,
- encadrer les réponses aux questions.

Exercice 1 : Question de cours, 3 points

Répondez précisément, d'après le cours, aux questions portant sur les positions relatives. Aucune justification n'est demandée.

1. Quelles sont les différentes possibilités pour les positions relatives de deux droites de l'espace ?
2. Quelles sont les différentes possibilités pour les positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace ?
3. Quelles sont les différentes possibilités pour les positions relatives de deux plans de l'espace ?

Exercice 2 : Deux droites, 3 points

On donne les représentations paramétriques de deux droites :

$$(d) : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & -t & + & 1 \\ y & = & 2t & - & 2 \\ z & = & t & - & 4 \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad (d') : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 2u & - & 1 \\ y & = & -5u & & \\ z & = & 3u & + & 2 \end{array} \right. \quad (u \in \mathbb{R})$$

Déterminer si elles sont coplanaires ou non.

Exercice 3 : 3 points

Calculer les dérivées des fonctions suivantes f et g.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2e^x} \qquad g(x) = \frac{x}{e^{(x^2)} + 1}$$

Exercice 4 : Une limite, 2 points

Déterminer la limite :

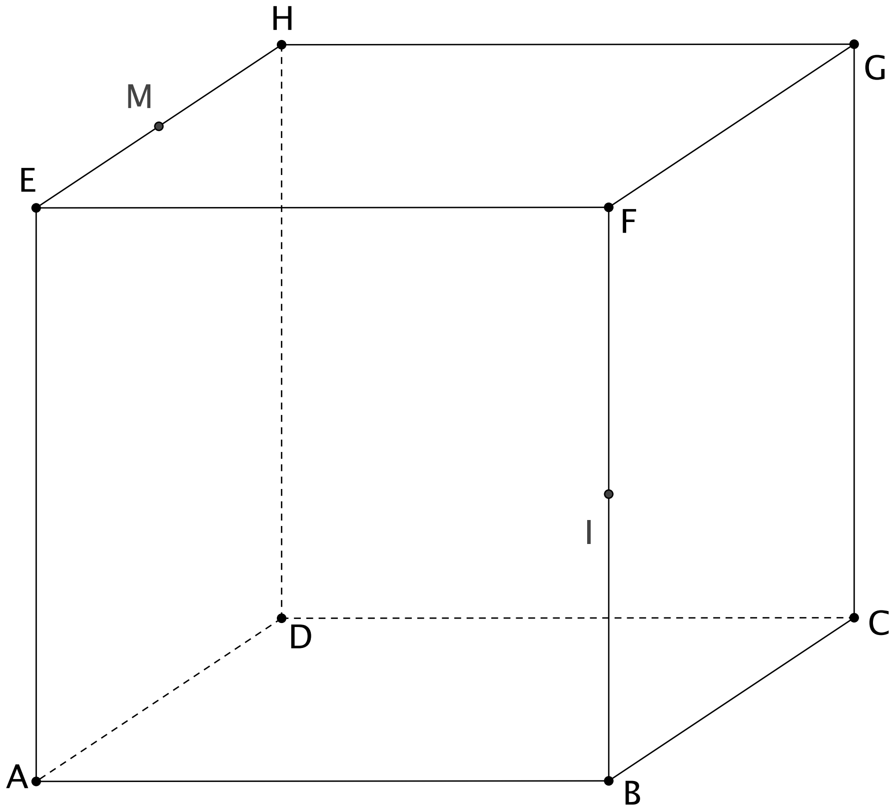
$$\lim_{x \to 1} \frac{(2x-1)^n - 1}{x - 1} \text{ où } n \text{ est un entier non nul fixé.}$$

Exercice 5 : Étude d'une section, 5 points

Remarque : Dans cet exercice, les points P et L étant construits, il est possible de traiter la question 4. en admettant le résultat de la question 3.

ABCDEFGH est un cube sur lequel on a placé les milieux M de [EH] et I de [FB]. On complétera, au fur et à mesure, la figure donnée ci-dessous.

1. Construire le point P tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HG}$ et le point L, symétrique de F par rapport à G.
2. Exprimer $\overrightarrow{LP}$ en fonction de $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{EH}$. Faire ensuite de même pour $\overrightarrow{MP}$.
3. En déduire que L, M et P sont alignés.
4. Dans cette question, on se propose de construire la section du cube par le plan (MPI).
   (a) Montrer que (LI) et (CG) sont sécantes. Construire le point d'intersection K.
   (b) Déterminer l'intersection de (MPI) et (CGH).
   (c) Montrer que le plan (MPI) coupe le plan (BFE) selon une droite parallèle à (KP). Construire cette droite et son point d'intersection Q avec (EA).
   (d) En déduire le tracé de la section du cube par le plan (MPI). Faire apparaître cette section en bleu sur la figure.



Exercice 6 : 4 points

On suppose que l'espace est muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}(1, 2, -4)$, $\overrightarrow{v}(2, 3, -2)$ et $\overrightarrow{w}(2, 4, -7)$ forment une base de l'espace.
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}(1, 1, 2)$, $\overrightarrow{v}(2, -2, 5)$ et $\overrightarrow{w}(1, -7, 4)$ sont coplanaires.