DS3 - Corrigé

Certains calculs intermédiaires sont omis dans ce corrigé. Ils doivent figurer dans une copie !

Exercice 1 : Quelques limites (Obligatoire)

1. On a : $\dfrac{2-x}{3x+\sqrt{x}} = \dfrac{\frac{2}{x}-1}{3+\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} 3+\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 3$.

   On sait aussi que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} - 1 = -1$.

   On en conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-x}{3x+\sqrt{x}} = \dfrac{-1}{3}}$

2. On a : $x-\sqrt{x^2+2} = \dfrac{(x-\sqrt{x^2+2})(x+\sqrt{x^2+2})}{x+\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{x^2-(x^2+2)}{x+\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{-2}{x+\sqrt{x^2+2}}$

   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2 = +\infty$ et aussi que $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$. On en déduit alors par le théorème de la limite de la composée que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2} = +\infty$.

   Il vient ensuite $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+1} = +\infty$ puis finalement : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+2} = 0.}$

3. On factorise le dénominateur (à l'aide du discriminant) : $x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$ ainsi :

$$\frac{-3x+1}{x^2+x-6} = \frac{-3x+1}{(x+3)(x-2)} = \frac{-3x+1}{x+3} \times \frac{1}{x-2}$$

   On a $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{-3x+1}{x+3} = \dfrac{-5}{5} = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$ d'où il vient : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{-3x+1}{x^2+x-6} = +\infty.}$

4. On utilise une expression conjuguée :

$$\frac{x-2}{\sqrt{3x-2}-2} = \frac{(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)}{(\sqrt{3x-2}-2)(\sqrt{3x-2}+2)} = \frac{(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)}{(3x-2-4)}$$
$$\frac{x-2}{\sqrt{3x-2}-2} = \frac{(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)}{3(x-2)} = \frac{\sqrt{3x-2}+2}{3}$$

   On sait que $\lim\limits_{x\to2} 3x-2 = 4$ et aussi que $\lim\limits_{X\to4} \sqrt{X} = 2$. On en déduit alors par le théorème de la limite de la composée que $\lim\limits_{x\to2} \sqrt{3x-2} = 2$. Il vient alors :

$$\boxed{\lim_{x\to3} \frac{x-2}{\sqrt{3x-2}-2} = \frac{4}{3}}$$

Exercice 2 : Avec des comparaisons, 3 points

Dans cet exercice, il ne fallait pas confondre le théorème des gendarmes et le théorème de la limite par comparaison. Noter que le titre de l'exercice pouvait mettre sur la piste.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{2 + \cos x}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ ainsi $1 \leqslant 2 + \cos x \leqslant 3$.
   On applique la fonction inverse qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:
   $$\frac{1}{1} \geqslant \frac{1}{2+\cos x} \geqslant \frac{1}{3} \quad \text{en particulier :} \quad \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2+\cos x}$$
   En multipliant par $x \geqslant 0$, il vient $\dfrac{x}{3} \leqslant \dfrac{x}{2+\cos x}$, c'est à dire $\boxed{\dfrac{x}{3} \leqslant f(x)}$
2. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{3} = +\infty$. À l'aide de l'inégalité précédente, on en déduit par le théorème des limites par comparaison que :
   $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$
3. *Remarque : Attention, ici on détermine une limite lorsque $x \to -\infty$ ainsi on ne pourra pas utiliser une inégalité qui a été établie pour $x \geqslant 0$. Il faut en établir une nouvelle, valable pour x dans un intervalle correspondant au comportement $x \to -\infty$.*
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on a : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ ainsi $1 \leqslant 2 + \cos x \leqslant 3$.
   On applique la fonction inverse qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:
   $$\frac{1}{1} \geqslant \frac{1}{2+\cos x} \geqslant \frac{1}{3} \quad \text{en particulier :} \quad \frac{1}{2+\cos x} \geqslant \frac{1}{3}$$
   En multipliant par $x \leqslant 0$, il vient $\dfrac{x}{2+\cos x} \leqslant \dfrac{x}{3}$, c'est à dire $f(x) \leqslant \dfrac{x}{3}$.
   On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{3} = -\infty$. À l'aide de l'inégalité précédente et par le théorème des limites par comparaison, on en déduit que :
   $$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$

Exercice 3 : Étude d'une fonction, 9 points

Partie A :

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x$.

1. On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$. Il vient donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty}$
   En factorisant par x, on obtient : $g(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right)$.
   Or, d'après le théorème des croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$. On en déduit que :
   $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$$
2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on obtient : $\boxed{g'(x) = \mathrm{e}^x - 1}$
   On remarque que g' est strictement croissante car exp est strictement croissante et de plus $g'(0) = \mathrm{e}^0 - 1 = 1 - 1 = 0$. Il vient donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

3. On en déduit alors le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$

4. D'après le résultat de la question précédente, le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est 1.
   On en déduit que : $\boxed{g(x) > 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$

Partie B :

1. D'après le résultat de la dernière question de la partie A, on sait que le dénominateur de $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x}$ ne s'annule pas ainsi : $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$
2. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - x = +\infty$ puis : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$
3. On procède par étapes : $1 + \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1} = 1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{\mathrm{e}^x - x}{\mathrm{e}^x - x} + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x} = f(x)$.

   On a donc bien l'égalité : $\boxed{f(x) = 1 + \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1}}$

   D'après le théorème des croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1 = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1} = 0$. Il vient alors : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$
4. On a montré que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ce qui prouve que :

   $\boxed{\text{L'axe } (Ox) \text{ est asymptote à la courbe } \mathcal{C}_f \text{ au voisinage de } -\infty.}$

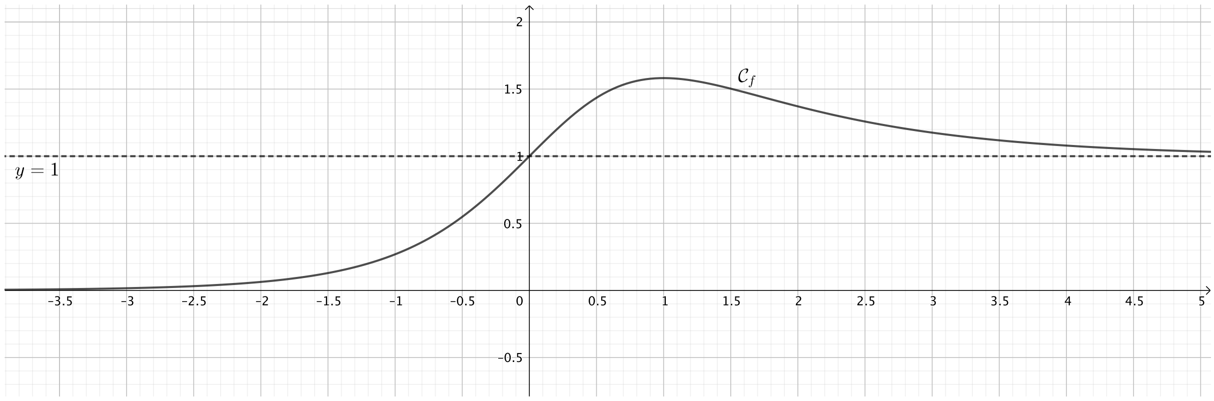
   On a montré que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ ce qui prouve que :

   $\boxed{\text{La droite d'équation } y = 1 \text{ est asymptote à la courbe } \mathcal{C}_f \text{ au voisinage de } +\infty.}$
5. On a $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x}$ ainsi f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - x) - \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1)}{(\mathrm{e}^x - x)^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - x)^2} = \frac{-x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(1 - x)}{(\mathrm{e}^x - x)^2}$$
6. D'après le résultat obtenu à la question précédente, on sait que le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$. Il vient donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

   Pour le maximum, on dispose de l'approximation : $\dfrac{e}{e-1} \approx 1,58$

7.



DS3	Ex 1	1.	2	3.	4.	Ex 2	1.	2	3.	Ex 3	A. 1.	A. 2.	A. 3.	A. 4.	B. 1.	B. 2.	B. 3.	B. 4.	B. 5.	B. 6.	B. 7.	Total
		2,00	**2,00**	**2,00**	**2,00**		**1,00**	**1,00**	**1,00**		**1,00**	**1,00**	**0,50**	**0,50**	**0,50**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**0,50**	20
1		2	1,5	1,5	2						0,5	0,75	0	0	0,25	0	1	1	1	0,5		12
2		2	1,5	1,5	2		1	1	0		0,5	0,5	0,25	0	0,25	1	0,5	0,25	0,25	0	0	12,5
3		1	2	1,5	0		1	0	0		0,75	0,5	0,25	0,25		1	0,5	1	1	0,5		11,25
4		2	2	1,75	2		1	1	0,5		0,5	0,5	0,25	0,5		0,5	1	1	1	1	0,25	16,75
5		2	2	2	2						0,5	0,75	0,25	0		1	0,5					11
6		2	2	1,75	1		1	1	0,5		0,5	0,5	0	0	0	1	0,5	1	1	1	0	14,75
7		2	1,5	2	0,5		0	0	0		1	0,5	0,25	0	0,25	0,75			1	0,75	0,5	11
8		2	2	2	0,5			1	0		0,5	0,75	0,25	0	0,25	0,75	0	0,5	1	0	0,25	11,75
9		2		2			1	1	0,5		1	1	0,5	0,5	0,5	0,75	1	1	1	0,75	0,25	14,75
10		2	0	1	0,5		1	0,75	0		0,5	0,5	0,5	0,5	0	1	0,5	0	0	0		8,75
11		2	0	0,5	0,5		1	0	0		1	0,5	0,25	0		0	0	0,5				6,25
12		2	1,5	2	2		1	1	0,5		1	0,75	0,5	0	0	1			1	1		15,25
13		2	2	0,5	0		1	1	0		0	0,5	0		0		0					7
14		1,5	1	0	0,5		1	0,25			0	0,75	0,25		0	0	0	0,25	0			5,5
15		2	1	0	0,5		1	1	0		0,5	0,75	0,25	0	0	0	0,5	1		1	0,5	10
16		2	1,5	1	1,5		0,5				1	0,75	0,5	0,5	0	1			1	0		11,25
17		2	1,5	1,5	0,5		0	0,5	0,5		0,25	0,75	0	0	0,5	0,75	1	0,5	1	1	0,5	12,75
18		1,5	0,5	0	0		0	0,5	0,25		0	0,5	0							0		3,25
19		2	1,5	2	2		1	1	0,5		1	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	1	1	1	0,5	18,5
20		2	2	2	1,5						1	0,5	0,5		0	1	1	1	1	1	0,5	15
21		0	2	1,5	1,5		1	1	0		0,5	0,5	0,5	0	0	0	0	0	1	0	0	9,5
22		2	2	2	2		1	1	0,5		1	1	0,5	0,5	0	1	1	1	1	1	0,5	19
23		0,5	1	0	0		1	0,5	0		0,5	0,5	0,25	0	0	0	0,25	0	1	0	0,5	6
24		2	1,5	2	2		0,5	1	0,5		0,5	1	0,5	0,5	0,5	1	1	0,75	0,75	1	0,5	17,5
25		2	2	2	2		1	1	0,5		1	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	1	1	1	0,5	19
26		2	2	0,5	2		0,5	1	0,5		0,5	1	0,5	0,5	0	1	0,5	0,75	1	0,75	0,5	15,5
27		2	2	0,5	0,5		0	0	0		0			0	0	0						5
28		2	1,5	2	2		1	1	0,5		1	0,75	0,5	0,5	0,5	1	0,5	1	1	1	0,5	18,25
29		1,75	0	0,5	0		0,5	0,5	0		0	0	0	0	0	0	0,5	0	0,5		0,25	4,5
30		2	1,5	1,5	2		1	1	0,5		1	0,5	0,5	0,5	0	0,5	0,25	1	1	0,75	0,5	16
31		2	2	1,5	2		1	1	0,5		1	0,75	0,25	0	0	1	1	1	1	1	0,25	17,25
32		2	2	2	2		1	0,75	0,25		1	1	0,5	0,5	0	1	1	1	1	1	0,5	18,5
																						12,352