

## Devoir surveillé n°3

Rappel de quelques consignes de présentation :

- tracer un cartouche et une marge à gauche,
- passer une ligne entre deux questions et bien les numérotéer,
- écrire lisiblement et sans ratures,
- encadrer les réponses aux questions.

---

### Exercice 1 : Quelques limites, 8 points

Déterminer les limites suivantes :

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x}{3x + \sqrt{x}}$ | 3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{-3x+1}{x^2+x-6}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2+2}$          | 4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{3x-2}-2}$                 |

---

### Exercice 2 : Avec des comparaisons, 3 points

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x}{2 + \cos x}$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $\frac{x}{3} \leq f(x)$ .
2. En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
3. En utilisant une démarche semblable, déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

---

### Exercice 3 : Étude d'une fonction, 9 points

**Partie A :** On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x - x$

1. Déterminer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
2. Calculer  $g'(x)$  et déterminer le signe de  $g'(x)$  en fonction de  $x$ .
3. Dresser le tableau de variation de  $g$ .
4. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) > 0$ .

**Partie B :** On définit la fonction  $f$  par  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
3. Justifier que  $f(x) = 1 + \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1}$ . En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
4. Déterminer les éventuelles asymptotes qui se déduisent des résultats précédents.
5. Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$ .
6. Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variations.
7. Construire la représentation graphique de  $f$  avec ses asymptotes (en choisissant judicieusement les unités).