DS2 - Corrigé

Attention, certaines copies comportent trop de ratures : au-delà de 3 ratures 0,5 point peut être soustrait à la note finale et 1 point au-delà de 10 ratures.

Certain calculs intermédiaires sont omis dans ce corrigé. Ils doivent figurer dans une copie !

Exercice 1 : Question de cours

Solution : apprendre le cours.

Exercice 2 : Quelques limites

Remarque : Il est important de **simplifier** *toutes les expressions pour éviter de se retrouver avec une forme indéterminée qui empêche d'appliquer les théorèmes usuels (somme, produit et quotient de limites)*

1. On transforme l'expression pour lever l'indétermination :

$$u_n = \frac{\sqrt{n} - n}{4 + 3n} = \frac{n(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1)}{n(\frac{4}{n} + 3)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - 1}{\frac{4}{n} + 3}$$

.

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 = -1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{4}{n} + 3 = 3$.

Il vient alors : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\frac{1}{3}.}$

2. On procède selon la même idée : $v_n = n\sqrt{n} - 3n^2 = n^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 3\right)$.

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - 3 = -3$ et on a aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$.

Il vient alors : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty.}$

3. On a : $w_n = \frac{3^n + 4}{4^n - 3^n} = \frac{3^n}{4^n} \times \frac{1 + 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{1 + 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$.

Les nombres $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$ sont dans l'intervalle $]-1;1[$ donc on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$. On en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1 + 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n} = 1$.

Il vient ensuite : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0.}$

4. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos n \leq 1$ en ajoutant n : $n - 1 \leq n + \cos(n) \leq n + 1$

En multipliant l'encadrement précédent par le nombre positif $\frac{1}{2n+1}$ on obtient :

$$\frac{n-1}{2n+1} \leq \frac{n + \cos(n)}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2n+1}.$$

C'est à dire : $$\frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \leq x_n \leq \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}}.$$

Or on sait que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$

On conclut alors à l'aide du théorème des gendarmes : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}}$

Exercice 3 : Étude d'une suite

Rappel : Il faut toujours faire l'initialisation d'une récurrence sur la première valeur pour laquelle la propriété peut s'énoncer.

1. Montrons, par récurrence que la propriété $\mathcal{P}_n : u_n = \frac{1}{3} - (-2)^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = -\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3} - (-2)^n = \frac{1}{3} - (-2)^0 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$
   La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

   Hérédité : On suppose que pour un $n \geqslant 0$ fixé, on a : $u_n = \frac{1}{3} - (-2)^n$.
   D'après la relation de récurrence définissant la suite (u_n), on : $u_{n+1} = -2u_n + 1$.
   Il vient alors : $u_{n+1} = -2\left(\frac{1}{3} - (-2)^n\right) + 1 = -\frac{2}{3} - (-2)^{n+1} + 1 = \frac{1}{3} - (-2)^{n+1}$.
   Ceci prouve l'hérédité et achève la récurrence, on a établi que :

   $$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \boxed{u_n = \frac{1}{3} - (-2)^n}$$

2. Montrons par l'absurde que (u_n) diverge, on suppose donc qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

   On a montré que $u_n = \frac{1}{3} - (-2)^n$ ainsi : $u_n - \frac{1}{3} = -(-2)^n$ puis : $\frac{1}{3} - u_n = (-2)^n$

   On peut alors déduire de l'hypothèse prise que $\lim_{n\to+\infty} (-2)^n = \frac{1}{3} - \ell$ ce qui est absurde car on sait que la suite de terme général $(-2)^n$ diverge (suite du type q^n avec $q \leqslant -1$).

   L'hypothèse prise est donc fausse ainsi $\boxed{(u_n) \text{ diverge.}}$

Exercice 4 : Étude d'une suite définie par récurrence

Le graphe de la fonction f était donné en annexe, il aurait été judicieux de le regarder pour éviter les affirmations grossièrement fausses.

1. (a) La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition car le dénominateur ne s'y annule pas et on a :

   $$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{x^2-2}{2x^2} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2x^2}$$

   On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $x - \sqrt{2}$ sur $]0, +\infty[$ d'où le tableau de variation :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	

On calcule $f\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \dfrac{2}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\right) = \sqrt{2}.$

(b) Voir plus bas pour la construction des points A_0, A_1 et A_2.

2. (a) Montrons, par récurrence que la propriété $\mathcal{P}_n : \sqrt{2} \leqslant u_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

Pour $n = 0$ on a $u_n = u_0 = 5 \geqslant \sqrt{2}$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : On suppose que pour un $n \geqslant 0$ fixé, on a : $\sqrt{2} \leqslant u_n$.
On a prouvé à la question 1. (a) que f est strictement croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$ ainsi en appliquant la fonction f, on conserve les inégalités :

$$f\left(\sqrt{2}\right) \leqslant f(u_n).$$

Or $f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$ et $f(u_n) = u_{n+1}$ ainsi :

$$\sqrt{2} \leqslant u_{n+1}.$$

Ceci prouve l'hérédité et achève la récurrence.

(b) On utilise la méthode de la différence en posant g la fonction définie par :

$$g(x) = x - f(x) = x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{x}\right).$$

Première solution :
g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right) > 0$. On en déduit que g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et comme $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$,

pour $x \geqslant \sqrt{2}$, $g(x) \geqslant 0$ c'est à dire : $\boxed{f(x) \leqslant x}$

Deuxième solution :
On factorise : $g(x) = \dfrac{x^2 - 2}{2x} = \dfrac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{2x}$.
Pour $x \geqslant \sqrt{2}$, on a $x - \sqrt{2} \geqslant 0$ et aussi $x + \sqrt{2} \geqslant 0$ ainsi $g(x) \geqslant 0$ c'est à dire :

$$\boxed{f(x) \leqslant x}$$

(c) On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$, on peut donc remplacer x par u_n dans la précédente inégalité ce qui donne :

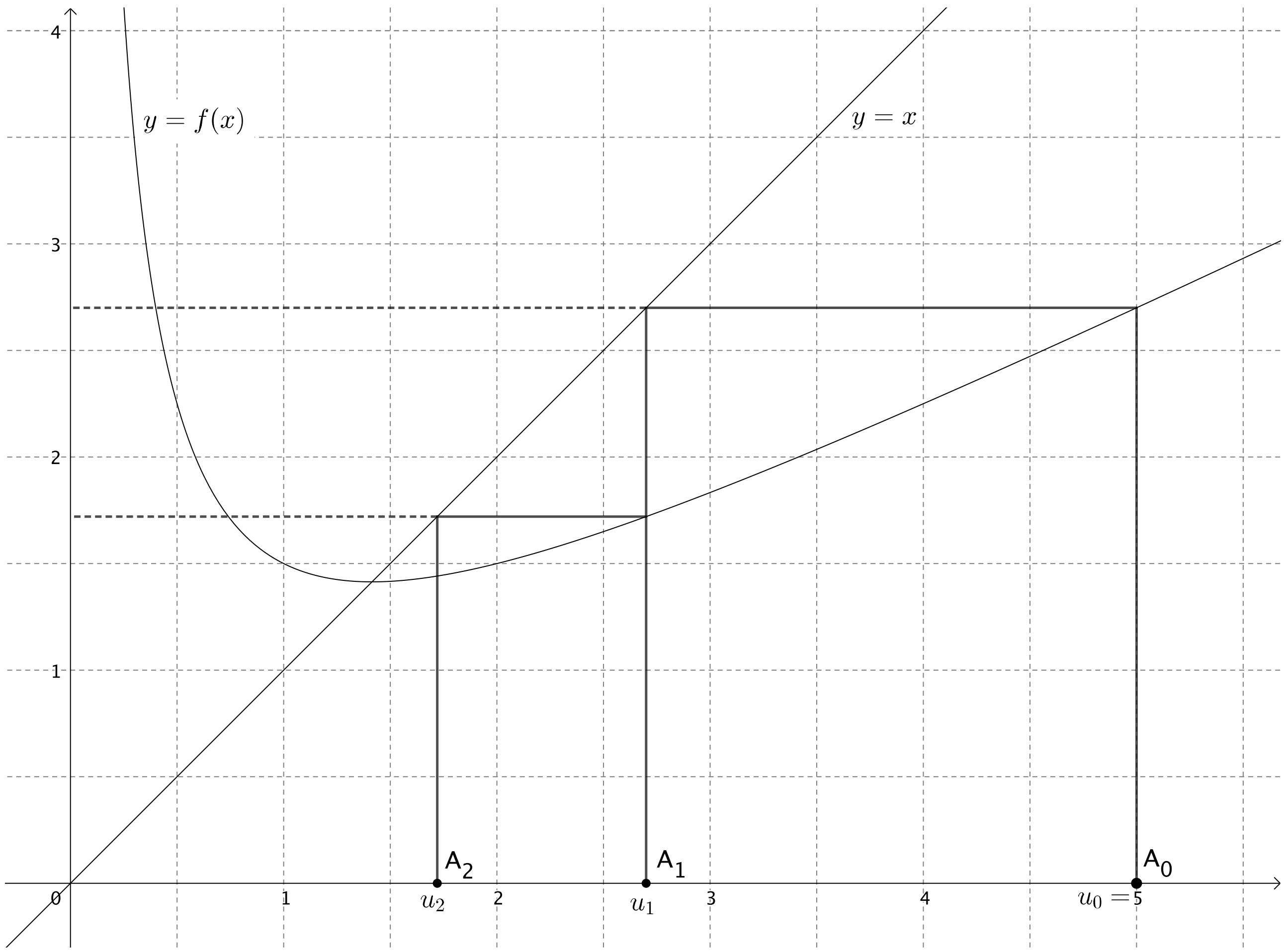
$$f(u_n) \leqslant u_n \text{ c'est à dire } u_{n+1} \leqslant u_n. \ \boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$$

(d) On a montré précédemment que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$ et aussi que (u_n) est décroissante ainsi (u_n) est minorée et décroissante.

On en déduit, par le théorème de convergence monotone des suites que :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge}}$$

3. En passant à la limite dans l'inégalité $u_n \geqslant \sqrt{2}$, on obtient $\ell \geqslant \sqrt{2}$ ainsi $\ell > 0$.
   La propriété de la limite d'un quotient donne alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{u_n} = \dfrac{2}{\ell}$.
   On obtient ensuite par somme et produit :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$$
   Or, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ ainsi en passant à la limite dans $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$ la propriété d'unicité de la limite permet de conclure que :
   $$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$$
   On résout cette équation :
   Pour $\ell > 0$, $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{2}{\ell}\right) \Leftrightarrow 2\ell = \ell + \dfrac{2}{\ell} \Leftrightarrow \ell = \dfrac{2}{\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 2 \Leftrightarrow \ell = \sqrt{2}$ ou $\ell = -\sqrt{2}$.
   Or ici $\ell = -\sqrt{2}$ n'est pas possible donc : $\boxed{\ell = \sqrt{2}}$
4.
```
def heron(n):
    u = 5
    for k in range(n):
        u = (u + 2/u)/2
    return u
```



DS2		Ex 1	1.	2	Ex 2	1.	2	3.	4.	Ex 3	1.	2	Ex 4	1.(a)	1.(b)	2.(a)	2.(b)	2.(c)	2.(d)	3.	4.	Total
			1,00	**2,00**		**1,00**	**1,00**	**2,00**	**2,00**		**1,50**	**1,50**		**1,50**	**1,00**	**1,50**	**1,50**	**1,00**	**1,00**	**1,50**	**1,00**	22
1			1	1,5		1	1	1	1,5		0,5			0	1	0	0		0			8,5
2			0	1		1	0,5	1,5	2		1,5	0		0,5	1	0,5	0,5	0,5	1	1,5	0,5	13,5
3			1	0,5		0	0	1	0,5		0,5	0		0	0	0	0	0	1	0	0	4,5
4			1	2		1	1	1	2		1,5	1,5		0	1	0,5		0,5	1	1	0,5	15,5
5			0			0,5	0	1,5	1,5		1	0		0	0	0,5	0	1				6
6			1	2		1	1	2	2		1,5	1,5		0,5	0,5	0,5	1,5	1	1	1	0,5	18,5
7			0	1,5		0,5		1	0,5		0,5	0		0,5	1	0,5					1	7
8			1	1,5		1	0,5	2	2		1	1		1	1	0,5	0	0,5			0,5	13,5
9			0	0,5		0,5	0		1,5		0,5			0	0,5		0	0		0		3,5
10			1	1,5		0,5	0,5	2	2		1	0		0	1	1	0	0	1	0,5	0,5	12,5
11			1	0,5		1	0,5	2	0,5		0,5			0	0	0,5	0	0	1	1	0	8,5
12			1	0,5		1	1	2	2		1,5	0		0	1	1	0	0	1	0	0,5	12,5
13			1	2		1	0,5	1,5	1,5		1,5	0		1	0	1,5	1	0,5	1	0	1	15
14			0	2		1	0,5	1,5	1,5		1	0		0	0,5	1				0	1	10
15			1	2		1	0,5	2	2		1,5			0	1	0,5	0	0	1	1		13,5
16			1	2		1	1	2	2		1,5	1,5		0,5	1	0		0,5	1	1	0,5	16,5
17			1	2		1	1	1	1,5		0,5	0		0	0	0	0	0	1	0	0	9
18			1	0,5		1	0,5	1,5	2					0	1	0	0	0	0		0,5	8
19			1	1,5		1	1	2	2		1,5	0,5		0,5	1	0,5	0	0,5	1	1,5	1	16,5
20			1	0,5		1	0,5	2	2		0,5	0		0	1	0,5	0	0,5	0	0		9,5
21			0,5	2		1	0,5	2	2		0,5	0		0	1	1	1	0	1	1	1	14,5
22			0,5	0,5		0	0	1	0		0,5	0		0,5	1	0,5	0	0	1		0,5	6
23			1	1,5		1	1	2	2		1	0		1	1	1	1,5	0,5	1	1	1	17,5
24			1	2		1	1	2	2		1,5	0		0	1	1,5	1,5	1	1	1	1	18,5
25			0	0,5		0	0	1	0,5		1	0		0	1	0,5	0,5	0	1	0,5	0	6,5
26			0,5	2		1	0,5	2	2		1,5	0		0,5	0	0,5	0	0	1	0	0	11,5
27			1	0,5		1	1	1	2		1,5	0		0	1		0	0	1	1	1	12
28			0	0		0	0	0,5	1		0,5				1						0	3
29			1	2		1	0,5	2	2		1,5	0		1	1	0,5	1,5	0	1	1,5	0,5	17
30			0	0,5		1	0,5	1,5	1		1	0		0,5	1	1	0	0,5	1	0	0,5	10
31			0	0,5		0,5	0,5	0,5	0,5		0,5	0		0	0,5	0,5	0	0	0	0	0,5	4,5
32			1	1		1	0	1,5	1,5		0,5	0		0,5	1	0,5	0	0,5	1		0	10
moyenne																						11