# Devoir surveillé n°2

Rappel de quelques consignes de présentation :

— tracer un cartouche et une marge à gauche,
— passer une ligne entre deux questions et bien les numéroter,
— écrire lisiblement et sans ratures,
— encadrer les réponses aux questions.

On rappelle que, conformément au règlement intérieur du lycée :

— « Tout élève convaincu de fraude à un devoir de contrôle est pénalisé par la note zéro, ... ».
— « Pendant les devoirs, **la détention et/ou la manipulation de tout appareil électronique comme un téléphone portable ou une tablette caractérisent une tentative de fraude passible de sanctions.** »

## Exercice 1 : Question de cours, 3 points

1. Énoncer précisément le théorème de convergence monotone des suites dans le cas d'une suite croissante.
2. On considère deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que, à partir d'un certain rang on ait : $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   Que peut-on dire concernant la limite de $v_n$ ?
   Démontrer cette propriété.

## Exercice 2 : Quelques limites, 6 points

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}-n}{4+3n}$
2. $v_n = n\sqrt{n} - 3n^2$
3. $w_n = \dfrac{3^n+4}{4^n-3^n}$
4. $x_n = \dfrac{n+\cos(n)}{2n+1}$

## Exercice 3 : Étude d'une suite , 3 points

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = & -\dfrac{2}{3} \\ u_{n+1} & = & -2u_n+1 \end{cases}$

1. À l'aide d'une démonstration par récurrence montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{3} - (-2)^n$.
2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)$.

## Exercice 4 : Étude d'une suite définie par récurrence, 8 points

Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$

1. (a) Soit $f$ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

   Étudier le sens de variation de $f$.

   (b) On a représenté, voir en annexe [1], la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$. Construire sur ce graphique, les points $\mathrm{A}_0$, $\mathrm{A}_1$ et $\mathrm{A}_2$ de l'axe $(\mathrm{O}x)$ d'abscisses respectives $u_0, u_1$ et $u_2$.

2. (a) Montrer à l'aide d'une récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

   (b) Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) \leqslant x$.

   (c) En déduire que la suite $(u_n)$ est décroissante.

   (d) Prouver qu'elle converge.

3. Soit $\ell$ la limite de la suite $(u_n)$. Montrer que $\ell$ est solution de l'équation

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$$

   En déduire sa valeur.

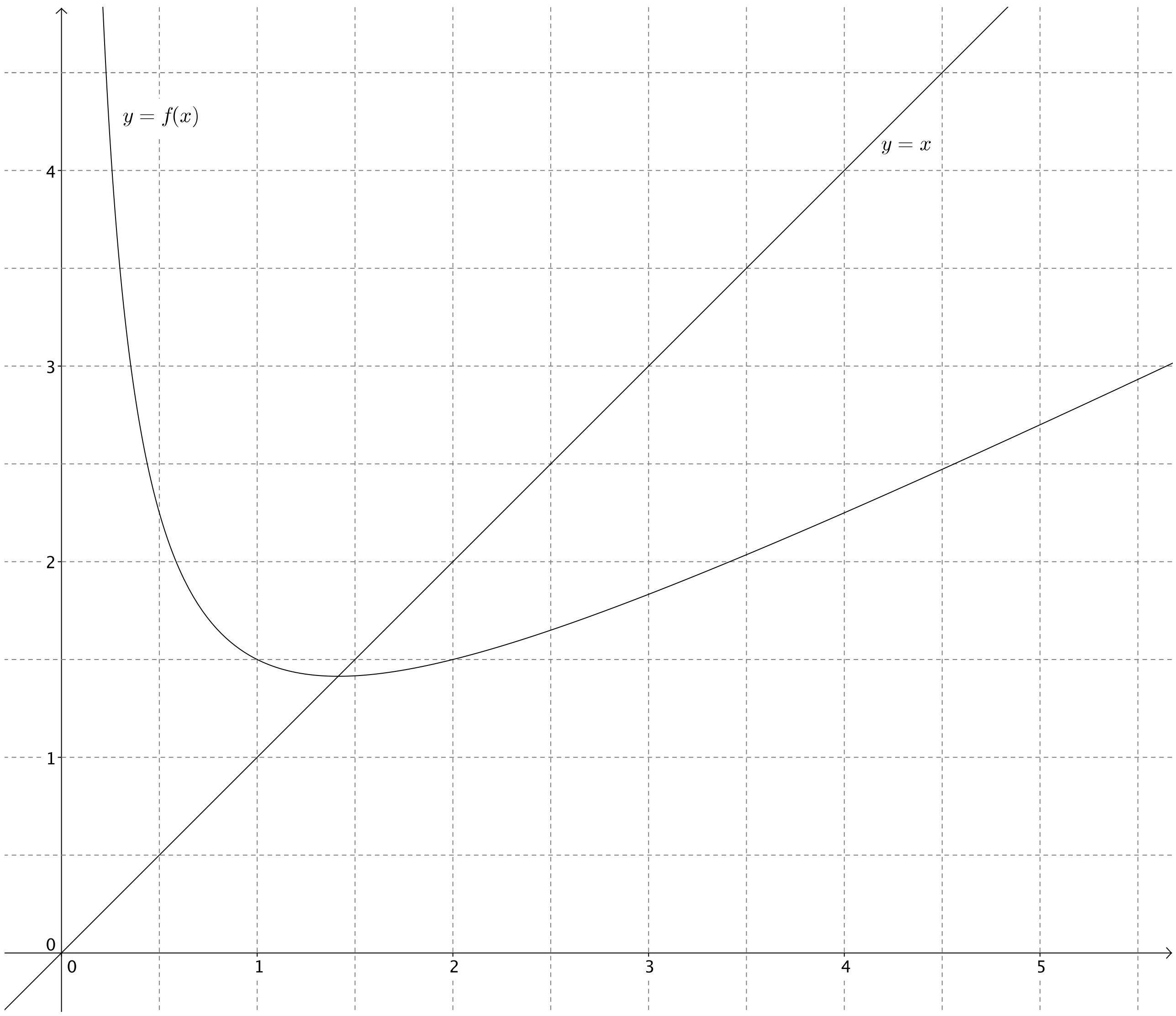
4. Compléter la fonction python de l'annexe qui calcule la valeur de $u_n$.

1. À rendre avec votre copie.

## Annexe à rendre avec la copie

Nom : .......................................................................

Prénom : .......................................................................




Fonction python à compléter :

```
def heron(n):
    u = 5
    for

    return u
```