DS1 - Corrigé

Certain calculs intermédiaires sont omis dans ce corrigé. Ils doivent figurer dans une copie !

Exercice 1 : Une démonstrations par récurrence

1. On obtient : $\boxed{u_2 = \frac{5}{2},\ u_3 = \frac{7}{3},\ \text{et } u_4 = \frac{9}{4}.}$

   Attention, tous les détails de ces calculs doivent figurer sur la copie.

2. Montrons, par récurrence sur n que $u_n = \frac{2n+1}{n}$.

   Initialisation : Pour $n = 1$, $u_n = 3$ et $\frac{2n+1}{n} = \frac{2\times 1+1}{1} = 3$
   La propriété est donc vraie pour $n = 1$.
   Hérédité : On suppose que pour un $n \geqslant 1$ fixé, on a : $u_n = \frac{2n+1}{n}$.
   D'après la relation de récurrence définissant la suite (u_n), on : $u_{n+1} = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1}$.
   Il vient alors : $u_{n+1} = \frac{3\frac{2n+1}{n} - 4}{\frac{2n+1}{n} - 1} = \frac{\frac{6n+3-4n}{n}}{\frac{2n+1-n}{n}} = \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{n+1}$.
   Ceci prouve l'hérédité et achève la récurrence, on a établi que :

   $$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \boxed{u_n = \frac{2n+1}{n}}$$

Exercice 2 : Une suite associée

1. On obtient : $\boxed{u_1 = \frac{9}{5},\ u_2 = \frac{5}{3},\ \text{et } u_3 = \frac{11}{7}.}$

2. (a) La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition car le dénominateur ne s'y annule pas et on a :

   $$f'(x) = \frac{5(x+3) - (5x-1)\times 1}{(x+3)^2} = \frac{16}{(x+3)^2} > 0$$

   On ne déduit que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-3, +\infty[}$

   (b) On calcule $f(1) = \frac{5\times 1 - 1}{1+3} = \frac{4}{4} = 1$.

   (c) Montrons, par récurrence sur n que la propriété : P_n : « $u_n > 1$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation : On a $u_0 = 2 > 1$
   La propriété est donc vraie pour $n = 0$.
   Hérédité : On suppose que pour un $n \geqslant 0$ fixé, on a : $u_n > 1$.
   On sait que f est strictement croissante sur $]-3, +\infty[$ ainsi $f(u_n) > f(1)$.
   On sait aussi que $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = 1$ ainsi $u_{n+1} > 1$
   Ceci prouve l'hérédité et achève la récurrence. On a établi que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1}$

(d) Première solution : par récurrence.

Montrons, par récurrence sur n que la propriété P_n : « $u_{n+1} < u_n$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : On a $u_1 = \dfrac{9}{5} < 2 = u_0$.

La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité : On suppose que pour un $n \geqslant 0$ fixé, on a : $u_{n+1} < u_n$.

On sait que u_{n+1} et u_n sont dans $]-3, +\infty[$ sur lequel la fonction f est strictement croissante ainsi : $f(u_{n+1}) < f(u_n)$. Or $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(u_n) = u_{n+1}$.

On a donc $u_{n+2} < u_{n+1}$.

Ceci prouve l'hérédité et achève la récurrence, on a établi que : $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$

Deuxième solution : par une méthode de la différence.

On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3} - u_n = \dfrac{5u_n - 1 - u_n(u_n + 3)}{u_n + 3} = \dfrac{5u_n - 1 - u_n^2 - 3u_n}{u_n + 3}$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 3} = -\dfrac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n + 3} = -\dfrac{(u_n - 1)^2}{u_n + 3}$

Sachant que $u_n > 1$, on en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$: $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$

3. On obtient : $\boxed{v_0 = 1,\ v_1 = \dfrac{5}{4},\ v_2 = \dfrac{3}{2},\ \text{et } v_3 = \dfrac{7}{4}.}$

4. Remarque : D'après ce qui précède, on sait qu'il faut montrer que (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{4}$.

   On a, d'une part : $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{\frac{5u_n - 1}{u_n + 3} - 1} = \dfrac{1}{\frac{5u_n - 1 - u_n - 3}{u_n + 3}} = \dfrac{1}{\frac{4u_n - 4}{u_n + 3}} = \dfrac{u_n + 3}{4u_n - 4}$.

   Et d'autre part : $v_n + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{u_n - 1} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{4(u_n - 1)} + \dfrac{u_n - 1}{4(u_n - 1)} = \dfrac{u_n + 3}{4u_n - 4}$

   On constate que $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{4}$: $\boxed{(v_n) \text{ est arithmétique de raison } \dfrac{1}{4}.}$

5. On en déduit que $\boxed{v_n = v_0 + \dfrac{n}{4} = 1 + \dfrac{n}{4}}$.

   On sait que $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ ainsi $u_n - 1 = \dfrac{1}{v_n}$ puis $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1$.

   Il vient alors : $u_n = \dfrac{1}{1 + \frac{n}{4}} + 1 = \dfrac{4}{4 + n} + 1 = \dfrac{8 + n}{4 + n}$.

   Le terme général de (u_n) est donnée par : $\boxed{u_n = \dfrac{8 + n}{4 + n}}$

Exercice 3 : Deux sommes, 3 points

Les deux questions sont extraites du cours. Voir la solution donnée en classe.

Exercice 4 : Étude d'une suite arithmético-géométrique

1. On obtient : $$\boxed{u_1 = \frac{4}{3},\ u_2 = \frac{26}{9},\ \text{et } u_3 = \frac{106}{27}.}$$

2. a.) On a : $v_{n+1} = a + u_{n+1} = a + \dfrac{2\,u_n}{3} + 2$. On sait que $v_n = a + u_n$ ainsi $u_n = v_n - a$.

   Il vient donc : $v_{n+1} = a + \dfrac{2(v_n - a)}{3} + 2 = \dfrac{3a}{3} + \dfrac{2v_n - 2a}{3} + 2 = \dfrac{2}{3}v_n + \dfrac{a}{3} + 2$.

   b.) Pour que (v_n) soit géométrique, il suffit que $\dfrac{a}{3} + 2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{3} = -2 \Leftrightarrow \boxed{a = -6}$

   c.) Pour cette valeur de a, on a : $v_{n+1} = \dfrac{2}{3}v_n$. La raison de (v_n) est $\boxed{q = \dfrac{2}{3}}$

   d.) Sachant que $a = -6$, $v_0 = -6 + u_0 = -6 - 1 = -7$: $\boxed{v_0 = -7}$

3. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = -7$ ainsi :

$$\boxed{v_n = -7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

4. Sachant que $u_n = v_n - a = v_n + 6$, on en déduit l'expression de u_n en fonction de n :

$$\boxed{u_n = -7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6}$$

Feuille1

DS1		Ex 1	1.	2	Ex 2	1.	2.(a)	2.(b)	2.(c)	2.(d)	Ex 3	1.	2	Ex 4	1.	2.(a)	2.(b)	2.(c)	2.(d)	3.	4.		Total
			1,00	**3,00**		**1,00**	**1,00**	**0,50**	**2,00**	**1,50**		**1,50**	**1,50**		**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**		20
1			1	2,5		1	1	0,5	1			1			1	0							9
2			1	0,5		1	0	0,5	0	0		1,5	1		1		0	0	0	0	0		6,5
3			1	0		1		0,5	0			1	1,5		1	0,5							6,5
4			1	0,5		1	1	0,5	0,5			1	1		0	0							6,5
5			1	3		1	1	0,5	0,5			1,5	1,5		1	1	1	1	1	1	1		17
6			1	2,5		1	0,5	0,5	0,5			0,5	1		1	0							8,5
7			1	1		0,5	1	0,5	0,5	0,5		1,5	1,5		1	1	1	1	1	1	0,5		14,5
8			1			1	0,5	0,5				1	0,5		1	1	1	1	1	1	0,5		11
9			1	3		1	1	0,5	1,5	1		1,5	1,5		1	0,5							13,5
10			1	0,5		1	1	0,5	0	0		1,5	1,5		0,5	0	1	0,5	1	0,5	0,5		11
11			1	3		1	0	0,5				1,5	1,5		1	1	1	1	1	1	1		15,5
12			1	2,5		1	1	0,5	0	0		1,5	0		0,5	0							8
13			0,5	0,5		1	0	0,5				0,5	1		1	0,5							5,5
14			1	0,5		1	0	0,5	0			0	0		1	0				0,5			4,5
15			1	2,5		1	1	0,5	0			1,5	1		1	0	0	0,5	0	0,5	0,5		11
16			1	1,5		1		0	0,5			1,5	1		1	0,5	1	1					10
17			1	2,5		1	0	0,5	0,5			0	0,5		1	0,5	1	1	1				10,5
18			1	1,5		1	0	0,5	0,5			1	0,5		1								7
19			1	1,5		1	0,5	0,5	1			1	0		0,5	0,5	0	0	0	1			8,5
20			0,5	1		1		0,5	1			1,5	1		1								7,5
21			1	1		1	0,5	0,5	0,5	0		1,5	1,5		1	0	1	1	1	0,5			12
22			1	2,5		1	0	0,5	0,5			1	0		1	0	0	0	1				8,5
23			1	0		1	0	0,5				0			1	0							3,5
24			1	3		1	1	0,5	1			1,5	1		1	0,5	1	1	0	1	0,5		15
25			1	2,5		1	1	0,5	0,5			1	1,5		1	1	0,5	1	1	0	1		14,5
26			1	1,5		1	0,5		0,5			0,5	1,5		1	0							7,5
27			1	3		1	1	0,5	0,5			1,5	1,5		1	0,5				0,5			12
28			1	3		1	0,5	0,5	1,5	1		1,5	1,5		1	0	1	1	1	1	0,5		17
29			1	3		1	0,5	0,5	0,5			1,5	1		1	1	0		0,5	0,5	1		13
30			0,5	0,5		0,5	0,5	0,5	0,5			0,5	0,5		0	0,5		0	0				4,5
31			1	1		1	0	0,5				0,5	0,5		1	0							5,5
32			0	1,5		1	0	0,5	0,5	0		0,5	0		0,5	0							4,5
33			1	0,5		0,5	0,5	0,5				0,5	0,5		0,5	0,5	0	0	0				5
Moy																							9,53