Devoir surveillé n°1

Rappel de quelques consignes de présentation :

- tracer un cartouche et une marge à gauche,
- passer une ligne entre deux questions et bien les numéroter,
- écrire lisiblement et sans ratures,
- encadrer les réponses aux questions.

Exercice 1 : Une démonstrations par récurrence, 4 points

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_1 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n - 4}{u_n - 1} \end{cases}$

On admet que la suite (u_n) est bien définie et a tous ses termes strictement positifs.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n = \dfrac{2n+1}{n}$.

Exercice 2 : Une suite associée, 6 points

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases}$

On admet qu'elle est bien définie.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-3, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x-1}{x+3}$. On a donc : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 sous forme de fractions irréductibles.
2. (a) Montrer que f est strictement croissante sur son intervalle de définition.
   (b) Calculer $f(1)$.
   (c) En déduire, à l'aide d'une démonstration par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
   (d) Démontrer que (u_n) est décroissante.

Exercice 3 : Deux sommes, 3 points

Calculer en fonction de n :

$S_1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1)$.

$S_2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{2^n}$.

Tournez SVP.

Exercice 4 : Étude d'une suite arithmético-géométrique, 7 points

Soit (u_n) la suite définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & -1 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{2\,u_n}{3}+2 \end{array}\right.$

1. Calculer u_1, u_2, et u_3.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = a + u_n$ où a est un paramètre réel quelconque.
   a.) Montrer que la suite (v_n) vérifie la relation de récurence : $v_{n+1} = \dfrac{2\,v_n}{3} + \dfrac{a}{3} + 2$
   b.) Quelle valeur donner au paramètre a pour que (v_n) soit géométrique ?
   c.) Quelle est alors la raison de (v_n) ?
   d.) On fixe dans toute la suite de l'exercice cette valeur pour a. Que vaut alors v_0 ?
3. Déterminer l'expression du terme général de (v_n).
4. En déduire l'expression de celui de (u_n).