DM5 - Corrigé

Exercice 1

On sait que la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ ainsi, sur $[a, b]$, la corde est au-dessus de la courbe. Le milieu M de la corde est le milieu des points $\mathrm{A}(a, \mathrm{e}^a)$ et $\mathrm{B}(b, \mathrm{e}^b)$ dont les coordonnées sont donc :

$$x_M = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}$$

Le point P de la courbe dont l'abscisse est celle de M a pour ordonnée $y_P = \exp\left(\frac{a+b}{2}\right) = \mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}}$. Comme la courbe est sous la corde on en déduit que :

$$\boxed{\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}}$$

Exercice 2

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{1 + \frac{1}{x^2}}{\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}}$.

   On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1$ et par le théorème des croissances comparées, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$. On en déduit par quotient que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\mathrm{e}^x} = (x^2+1)\mathrm{e}^{-x}$.

   On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ ainsi, d'après le théorème de la limite de la composée, on en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$.

   Par ailleurs, on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 = +\infty$ ainsi par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

2. On a : $f(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^{-x}$. La fonction f est donc le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

   $$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + (x^2+1)(-\mathrm{e}^{-x}) = -\mathrm{e}^{-x}(x^2 - 2x + 1) = -\mathrm{e}^{-x}(x-1)^2$$

   Le signe de $f'(x)$ est donc l'opposé de celui de $(x-1)^2$ et on en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	0

3. Pour étudier la convexité de f, on calcule $f''(x)$.

   f' est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 2x + 1) - \mathrm{e}^{-x}(2x - 2) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 2x + 1 - 2x + 2) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 4x + 3)$

   On factorise le trinôme : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 = 4 = 2^2$. $x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$.

   On obtient : $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-1)(x-3)$. Le signe de $f''(x)$ est donc celui de $(x-1)(x-3)$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	− 0	+

On en déduit que $\boxed{f \text{ est convexe sur }]-\infty, 1] \text{ et sur } [3, +\infty[\text{ et concave sur } [1, 3]}$

De plus, $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ présente un point d'inflexion à l'abscisse 1 et un autre à l'abscisse 3}}$

Exercice 3 : Deux démonstrations pour la même formule

Première méthode : par le calcul.

On utilise la formule du cours : $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

1. $n\dbinom{n-1}{p-1} = n \times \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = \dfrac{n \times (n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = \dfrac{n!}{(p-1)!(n-p)!}$.
2. $p\dbinom{n}{p} = p \times \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{p \times n!}{p(p-1)!(n-p)!} = \dfrac{n!}{(p-1)!(n-p)!}$.
3. On constate que : $$\boxed{n\binom{n-1}{p-1} = p\binom{n}{p}}$$

Deuxième méthode : par une démonstration combinatoire.

1. Lorsqu'on commence par choisir le capitaine, on a d'abord n choix pour le choisir, il faut ensuite compléter l'équipe en choisissant $p-1$ coéquipiers parmi les $n-1$ adhérents restants ce qui donne $\binom{n-1}{p-1}$ choix possibles. Le principe multiplicatif s'applique et on a en tout $n \times \binom{n-1}{p-1}$ possibilités.
2. Lorsqu'on commence par former l'équipe, on a d'abord $\binom{n}{p}$ façons de choisir ses membres. Il reste alors à désigner le capitaine pour lequel il y a alors p choix. Le principe multiplicatif s'applique et on a en tout $\binom{n}{p} \times p$ possibilités.
3. On a dénombré de deux façons différentes le même ensemble, les deux résultats obtenus sont donc identiques ainsi :

$$\boxed{n\binom{n-1}{p-1} = p\binom{n}{p}}$$

Exercice 4

Considérons un groupe constitué de n femmes et m hommes dans lequel on doit choisir une équipe de r personnes.

D'après les résultats du cours, il y a $\dbinom{n+m}{r}$ façons de le faire.

On peut aussi distinguer selon le nombre de femmes présentes dans l'équipe. D'après le principe multiplicatif, il y a $\binom{n}{k} \times \binom{m}{r-k}$ manières de former une équipe comportant k femmes.

D'après le principe additif, il suffit d'additionner les différentes façon de former une équipe comportant de 0 à r femmes pour obtenir toutes les façons de former l'équipe. Il y a donc $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \times \binom{m}{r-k}$ possibilités.

On a dénombré de deux façons différentes le même ensemble, les deux résultats obtenus sont donc identiques ainsi :

$$\boxed{\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \times \binom{m}{r-k}}$$