

## Devoir à la maison n°5

---

### Exercice 1

---

Soit  $a$  et  $b$  deux réels quelconques. Montrer que :  $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$

Indication : On pourra utiliser la convexité de la fonction  $\exp$ .

---

### Exercice 2

---

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$ .

1. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de  $f$ .
3. Étudier la convexité de  $f$  (c'est à dire, déterminer les intervalles sur lesquels  $f$  est convexe ou concave) et préciser les éventuels points d'inflexion de  $\mathcal{C}_f$ .

---

### Exercice 3 : Deux démonstrations pour la même formule

---

On considère deux entiers  $n$  et  $p$  vérifiant  $1 \leq p \leq n$ . On se propose de montrer de deux manières différentes la formule :

$$n \binom{n-1}{p-1} = p \binom{n}{p}$$

**Première méthode : par le calcul.**

1. Calculer sous la forme d'un quotient comportant des factorielles le produit  $n \binom{n-1}{p-1}$ .
2. Calculer sous la forme d'un quotient comportant des factorielles le produit  $p \binom{n}{p}$ .
3. Que constatez-vous ?

**Deuxième méthode : par une démonstration combinatoire.**

Dans un club de sport, on peut choisir parmi  $n$  adhérents pour former une équipe de  $p$  joueurs et il faut désigner le capitaine parmi les membres de l'équipe.

1. On commence par choisir le capitaine parmi les adhérents puis on complète l'équipe en ajoutant les joueurs restant pour former l'équipe. Quel est le nombre de possibilités ?
2. On commence par former l'équipe puis on chois le capitaine parmi les membres de l'équipe. Quel est le nombre de possibilités ?
3. Conclure.

---

### Exercice 4 (facultatif)

---

Rédiger une solution pour l'exercice 126 page 38 du livre.