DM4 - Corrigé

Exercice 1 : Deux droites

On dispose des représentations paramétriques de deux droites :

$$(d) : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad (d') : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}(4, 1, -1)$ est un vecteur directeur de (d) et le vecteur $\overrightarrow{u'}(2, 1, 3)$ est un vecteur directeur de (d'). Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc ils ne sont pas colinéaires ainsi (d) et (d') ne sont pas parallèles. Il reste à montrer qu'elles ne sont pas sécantes. On résout le système :

$$\begin{cases} 1 + 4t = 2u \\ -1 + t = 3 + u \\ 2 - t = -2 + 3u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t - 2u = -1 \\ t - u = 4 \\ -t - 3u = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - u = 4 \\ 4t - 2u = -1 \\ -t - 3u = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t - u = 4 \\ 4t - 2u = -1 \\ -4u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - u = 4 \\ t = -1/4 \\ u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1/4 = 4 \\ t = -1/4 \\ u = 0 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution donc les droites ne sont pas sécantes.

$\boxed{\text{Les droites } (d) \text{ et } (d') \text{ ne sont ni sécantes ni parallèles donc elles ne sont pas coplanaires.}}$

Exercice 2 : Le théorème du toit

1. Soit A un point de P. On note d' la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$. Elle est parallèle à d donc à P or elle a le point A en commun avec P donc elle est incluse dans P. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est dans la direction de P. Le même raisonnement permet de montrer que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est dans la direction de Q.
2. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ dirige une droite qui est incluse dans P et Q donc il est dans la direction de chacun de ces deux plans.

   On raisonne par l'absurde en supposant que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

   Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donc deux vecteurs non colinéaires qui sont tous les deux simultanément dans la direction de P et de Q ce qui montre que P et Q sont parallèles. Ceci est absurde puisqu'ils sont sécants.

   On en déduit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires donc que $\boxed{\text{les droites } d \text{ et } \Delta \text{ sont parallèles}}$

Exercice 3 : Construction d'une section

Les droites (KJ) et (BC) sont sécantes dans le plan (SBC), elles se coupent en un point L. Ce point est commun aux plans (IJK) et (ABC) comme l'est aussi le point I, on trace donc la droite (LI) qui est donc l'intersection des plans (ABC) et (IJK). Elle recoupe (DC) en un point M qui est donc commun à (SDC) et (IJK) comme l'est aussi K. On finit en traçant (MK).