DM3 - Corrigé

A propos du travail en groupe :

Je ne peux pas vous faire progresser individuellement si je corrige dix fois la même production qui n'est pas la vôtre. De plus, au niveau de la classe entière, cela fausse mon appréciation des acquis.

Si la recherche d'une solution peut être le fruit d'un travail collectif, la rédaction de chaque élève doit être entièrement personnel. En conséquence, je vous demande de ne jamais passer un devoir ou même un brouillon (quel qu'en soit le support [1]) à un camarade et de ne pas solliciter un tel « service ».

Remarques :
- *Certains calculs intermédiaires sont omis dans ce corrigé. Ils doivent figurer dans une copie !*
- *Il est inutile de donner la limite d'une constante.*
- *Les calculs de limites doivent être suffisamment détaillés en ayant recours, si besoin, au théorème de la limite de la composée.*
- *Les traits de fractions doivent être tous tracés sinon vous perdez un quart de point au DS.*
- *Le parenthèses oubliées sont sanctionnées par le retrait d'un demi-point.*
- *N'utilisez pas les méthodes qui permettent de lever l'indétermination lorsque $x \to +\infty$ pour résoudre un problème de limite lorsque $x \to a$ pour $a \in \mathbb{R}$. Il y a peu de chance que cela fonctionne.*

Exercice 1 : Quelques limites (Obligatoire)

1. On a : $\dfrac{\sqrt{x}-2x}{3x+2} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}-2}{3+\frac{2}{x}}$.

   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2 = -2$.

   On sait aussi que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 + \dfrac{2}{x} = 3$.

   On en conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}-2x}{3x+2} = \dfrac{-2}{3}}$

2. On a : $x+\sqrt{x^2+1} = \dfrac{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}{x-\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$

   On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty$ et aussi que $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$. On en déduit alors par le théorème de la limite de la composée que $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$.

   Il vient ensuite $\lim\limits_{x\to-\infty} x - \sqrt{x^2+1} = -\infty$ puis finalement : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+1} = 0.}$

3. On factorise le dénominateur (à l'aide du discriminant) : $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$ ainsi :
$$\frac{x+3}{x^2-x-2} = \frac{x+3}{(x+1)(x-2)} = \frac{x+3}{x+1} \times \frac{1}{x-2}$$
   On a $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{5}{3}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$ d'où il vient : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{x+3}{x^2-x-2} = -\infty.}$

4. On utilise une expression conjuguée :
$$\frac{x-3}{\sqrt{2x-2}-2} = \frac{(x-3)(\sqrt{2x-2}+2)}{(\sqrt{2x-2}-2)(\sqrt{2x-2}+2)} = \frac{(x-3)(\sqrt{2x-2}+2)}{(2x-2-4)}$$
$$\frac{x-3}{\sqrt{2x-2}-2} = \frac{(x-3)(\sqrt{2x-2}+2)}{2(x-3)} = \frac{\sqrt{2x-2}+2}{2}$$

1. Par exemple à l'aide d'un téléphone portable.

On sait que $\lim\limits_{x \to 3} 2x - 2 = 4$ et aussi que $\lim\limits_{X \to 4} \sqrt{X} = 2$. On en déduit alors par le théorème de la limite de la composée que $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{2x-2} = 2$. Il vient alors :

$$\boxed{\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{\sqrt{2x-2}-2} = \frac{4}{2} = 2}$$

Exercice 2 : Étude d'une fonction rationnelle (Obligatoire)

1. Étude de la fonction f

   (a) On a $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x^2+1} = \dfrac{x - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$ et on sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ ainsi que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

   On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

   (b) f est le quotient de deux polynômes et le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on obtient :

   $$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - (x^3-2) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x(3x(x^2+1) - (x^3-2) \times 2)}{(x^2+1)^2}$$
   $$f'(x) = \frac{x(3x^3+3x-2x^3+4)}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^3+3x+4)}{(x^2+1)^2}$$

   On développe et réduit le produit :

   $$(x+1)(x^2-x+4) = x^3 - x^2 + 4x + x^2 - x + 4 = x^3 + 3x + 4$$

   On en déduit que $\boxed{f'(x) = \dfrac{x(x+1)(x^2-x+4)}{(x^2+1)^2}}$

   (c) On sait que le signe de $f'(x)$ donne les variations de f. Le discriminant de $x^2 - x + 4$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 1 - 16 = -15$ ainsi ce trinôme garde un signe strictement positif sur $\mathbb{R}$. On en déduit que le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x+1)$ ce qui permet de dresser le tableau :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-3}{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2. Asymptote et tangente.

   (a) *Première méthode : en factorisant de manière partielle le dénominateur dans le numérateur.*

   On a : $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x^2+1} = \dfrac{(x^2+1)x - x - 2}{x^2+1} = \dfrac{(x^2+1)x}{x^2+1} + \dfrac{-x-2}{x^2+1} = x + \dfrac{-x-2}{x^2+1}$

   Les valeurs $\boxed{\alpha = 1,\ \beta = -1 \text{ et } \gamma = -2}$ conviennent.

   Deuxième méthode : En résolvant un système d'équations.

   On a : $\alpha x + \dfrac{\beta x + \gamma}{x^2+1} = \dfrac{\alpha x(x^2+1) + \beta x + \gamma}{x^2+1} = \dfrac{\alpha x^3 + (\alpha + \beta)x + \gamma}{x^2+1}$

   Or $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x^2+1}$, ainsi pour avoir l'égalité, il suffit que :

$$\begin{cases} \alpha & = 1 \\ \alpha + \beta & = 0 \\ \gamma & = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = 1 \\ \beta & = -1 \\ \gamma & = -2 \end{cases}$$

Les valeurs $\boxed{\alpha = 1,\ \beta = -1 \text{ et } \gamma = -2}$ conviennent.

(b) D'après le résultat de la question précédente, on a : $f(x) = x + \dfrac{-x-2}{x^2+1}$ ainsi :

$$f(x) - x = \frac{-x-2}{x^2+1} = -\frac{(x+2) \times \frac{1}{x^2}}{(x^2+1) \times \frac{1}{x^2}} = -\frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et aussi que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$. On en déduit que :
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} = 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1$ ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$
Ceci montre que $(\mathcal{C}_f)$ admet $\Delta : y = x$ comme asymptote oblique (en $+\infty$).

(c) La position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et Δ est donnée par le signe de $f(x) - x = \dfrac{-x-2}{x^2+1}$ qui est donc celui de $-x-2$.
On en déduit que :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

Ainsi : $\boxed{(\mathcal{C}_f) \text{ est au-dessus de } \Delta \text{ sur }]-\infty, -2[\text{ et au-dessous sur }]-2, +\infty[}$

(d) Voir la figure plus loin.