

## Devoir à la maison n°3

Rappel de quelques consignes de présentation :

- tracer un cartouche et une marge à gauche,
- passer une ligne entre deux questions et bien les numéroter,
- écrire lisiblement et sans ratures,
- encadrer les réponses aux questions.

### — Exercice 1 : Quelques limites (Obligatoire) —

Déterminer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 2x}{3x + 2}$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 + 1}$
3.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x + 3}{x^2 - x - 2}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{2x - 2} - 2}$

### — Exercice 2 : Étude d'une fonction rationnelle (Obligatoire) —

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$  et on note  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

1. Étude de la fonction  $f$ 
  - (a) Étudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
  - (b) Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = \frac{x(x+1)(x^2-x+4)}{(x^2+1)^2}$ .
  - (c) Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variations.
2. On dit qu'une droite  $\Delta$  d'équation  $y = ax + b$  est une asymptote oblique à la courbe représentative  $(\mathcal{C}_f)$  d'une fonction  $f$  lorsque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ .
  - (a) Déterminer des nombres constants  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  tels que :

$$f(x) = \alpha x + \frac{\beta x + \gamma}{x^2 + 1}$$

- (b) En déduire que  $(\mathcal{C}_f)$  admet une asymptote oblique  $\Delta$  dont on déterminera l'équation.
  - (c) Étudier la position relative de  $(\mathcal{C}_f)$  et  $\Delta$ .
3. Tracer la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé ainsi que la droite  $\Delta$ .