DM2 - Corrigé

Certains calculs intermédiaires sont omis dans ce corrigé. Ils doivent figurer dans une copie !

Exercice 1 : Quelques limites

Remarques :
- *Il est inutile de donner la limite d'une constante.*
- *Ne pas montrer qu'il y a une forme indéterminée, c'est du temps perdu ; il faut directement transformer l'expression pour lever cette indétermination.*

1. On transforme l'expression pour lever l'indétermination : $u_n = \dfrac{2n+3}{n+1} = \dfrac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}$.

   On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2.}$

2. On procède selon la même idée : $v_n = \dfrac{5^n+3^n}{6^n} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   Les nombres $\dfrac{5}{6}$ et $\dfrac{1}{2}$ sont dans l'intervalle $]-1;1[$ donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{6}\right)^n = 0$ et aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$. On en déduit alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0.}$

3. On factorise par le terme « dominant » : $w_n = -n + \sqrt{n} = -n\Big(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$.

   On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1$ d'où il vient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty.}$

Exercice 2 : Avec un encadrement

Mise en garde : lorsque vous traitez d'inégalités, chaque étape doit être justifiée par une phrase en français qui indique l'opération effectuée ou, a minima, par une symbolique en marge avec une flèche. L'omission systématique de ces justifications peut entrainer le retrait de 0,5 ou 1 point.

---

1. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ ainsi en particulier pour $x = n^2$ on obtient :

   $$-1 \leq \cos(n^2) \leq 1$$

   d'où, en multipliant par -1 : $\quad -1 \leq -\cos(n^2) \leq 1$

   puis en ajoutant 1 : $\quad 0 \leq 1 - \cos(n^2) \leq 2$

2. En multipliant l'encadrement précédent par le nombre positif $\dfrac{1}{n+2}$ on obtient :

   $$0 \leq \frac{1-\cos(n^2)}{n+2} \leq \frac{2}{n+2}.$$

   C'est à dire : $\quad 0 \leq u_n \leq \dfrac{2}{n+2}$.

   Or on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n+2 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n+2} = 0$.

On conclut alors à l'aide du théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

Exercice 3 : Une suite convergente

La suite (u_n) est définie par : $u_n = \dfrac{1}{1+3} + \dfrac{1}{1+3^2} + \dfrac{1}{1+3^3} + \cdots + \dfrac{1}{1+3^n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+3^k}$.

(a) On obtient : $\boxed{u_1 = \dfrac{1}{4} = 0,25}$ $\boxed{u_2 = \dfrac{7}{20} = 0,35}$ et $\boxed{u_3 = \dfrac{27}{70} \simeq 0,39}$.

Remarque : une erreur ici n'est pas acceptable, il faut prendre le temps de bien comprendre la définition de la suite qui est donnée sous **deux formes différentes**.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $1 + 3^k \geqslant 3^k > 0$ et comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ on en déduit :

$$\boxed{\frac{1}{1+3^k} \leqslant \frac{1}{3^k}}$$

(c) *Remarque : Il faut bien faire attention à ne pas confondre une suite géométrique avec la somme de ses premiers termes. Par exemple : $a_n = 2^n$ et $b_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$ sont deux suites clairement différentes.*

La suite (v_n) est définie par $v_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$

i. *Première méthode : par récurrence*

Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $u_n \leqslant v_n$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $u_n = u_1 = \dfrac{1}{4}$ et $v_n = v_1 = \dfrac{1}{3}$ ainsi $u_1 \leqslant v_1$.

La propriété est donc vraie pour $n = 1$.

Hérédité : On suppose que pour un $n \geqslant 1$ fixé, on a : $u_n \leqslant v_n$

On utilise la propriété montrée à la question 2; pour $k = n + 1$: $\dfrac{1}{1+3^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{3^{n+1}}$. En additionnant membre à membre, on obtient :

$$u_n + \frac{1}{1+3^{n+1}} \leqslant v_n + \frac{1}{3^{n+1}}$$

C'est à dire : $u_{n+1} \leqslant v_{n+1}$

Ceci prouve l'hérédité et achève la récurrence, on a établi que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } u_n \leqslant v_n.}$$

Deuxième méthode : en sommant les inégalités

D'après le résultat de la question précédente, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque, on dispose des inégalités : $\dfrac{1}{1+3^k} \leqslant \dfrac{1}{3^k}$ pour tous les entiers k de l'intervalle $[\![1, n]\!]$.

En les additionnant membre à membre, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+3^k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}$.

C'est à dire : $\boxed{u_n \leqslant v_n.}$

ii. On reconnait que v_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et dont le premier terme est $\frac{1}{3}$. Il vient ainsi :

$$v_n = \frac{1}{3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$\boxed{v_n = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}$$

iii. On a $\frac{1}{3} \in]-1,1[$ ainsi $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. On en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}.}$

Par ailleurs, on a toujours $1-\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 1$ ainsi $v_n \leqslant \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est majorée par } \frac{1}{2}.}$$

Deuxième méthode pour montrer la majoration : en utilisant le théorème des suites convergentes monotones.

La suite (v_n) est une somme de termes positifs, elle est donc croissante. Par ailleurs, elle converge vers $\frac{1}{2}$ ainsi elle est majorée par $\frac{1}{2}$.

iv. On a obtenue précédemment l'inégalité $u_n \leqslant v_n$ et on vient d'établir que $v_n \leqslant \frac{1}{2}$. Ainsi, par transitivité : $u_n \leqslant \frac{1}{2}$. $\boxed{(u_n) \text{ est majorée par } \frac{1}{2}.}$

(d) D'après la définition de (u_n), on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{1+3^{n+1}}$, ainsi $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ceci montre que } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

(e) On a montré que (u_n) est croissante et majorée. On en déduit, d'après le théorème de convergence monotone des suites, qu'elle converge.

Exercice 4

(a) (i) La fonction f est définie de manière à avoir la propriété $\boxed{u_{n+1} = f(u_n)}$

(ii) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = 0 - 4 \times \frac{-1}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$.

On en déduit que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Le plus simple ici est d'utiliser la formule $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$ *pour calculer la dérivée. Mettre* $f(x)$ *sous la forme* $f(x) = \frac{5x+6}{x+2}$ *pour ensuite appliquer la formule* $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ *est particulièrement maladroit.*

(iii) Pour $x \geqslant 0$,

$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad 5 - \dfrac{4}{x+2} = x \quad \Leftrightarrow \quad 5 - x = \dfrac{4}{x+2} \quad \Leftrightarrow \quad (5-x)(x+2) = 4$

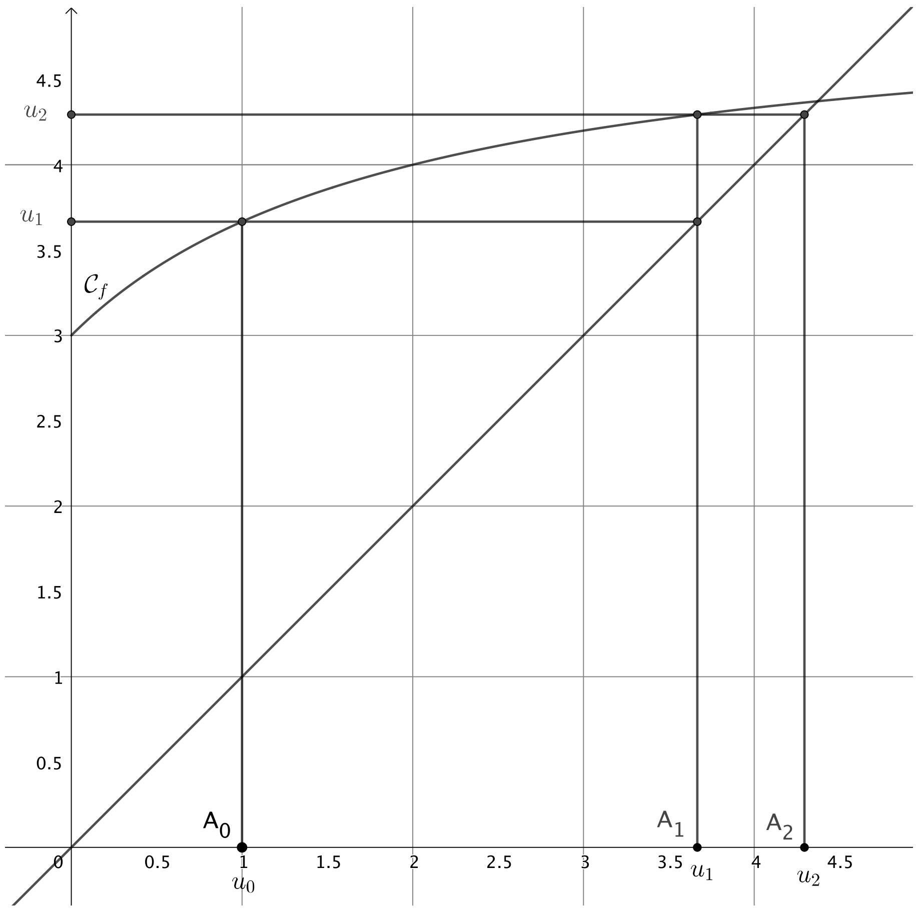
$\Leftrightarrow \quad 5x + 10 - x^2 - 2x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 3x + 6 = 0$

On utilise le discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 9 + 24 = 33 > 0$.

On obtient deux racines : $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{33}}{-2} = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2} > 0$ et $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{33}}{2} < 0$

On ne conserve que la racine positive : $\boxed{\alpha = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2} \approx 4,37}$

(iv)



(b) (i) Montrons, par récurrence sur n que la propriété $\mathcal{P}_n$: $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $n = 0$ on a $u_n = u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_1 = 5 - \dfrac{4}{1+2} = \dfrac{11}{3} \approx 3,66$ ainsi

$$0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité : On suppose que pour un $n \geqslant 0$ fixé, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

On a prouvé à la question (a) ii. que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ ainsi en appliquant la fonction f on conserve les inégalités :

$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha).$$

Or $0 \leqslant 3 = f(0)$, $\quad f(u_n) = u_{n+1}$, $\quad f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(\alpha) = \alpha$ ainsi :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha.$$

Ceci prouve l'hérédité et achève la récurrence.

Cette question est typique. L'utilisation des propriétés de la fonction f (qui ont fait l'objet de questions précédentes) doit être bien comprise.

(ii) Le résultat précédent montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leqslant \alpha \text{ et } u_n \leqslant u_{n+1}$$

ainsi (u_n) est majorée et croissante. On en déduit, par le théorème de convergence monotone des suites que (u_n) converge.

(iii) D'après ce qui précède on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

La suite (u_n) est croissante donc $1 = u_0 \leqslant u_n$ ainsi en passant à la limite : $1 \leqslant \ell$.

Par quotient de limites on obtient d'abord $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{u_n+2} = \dfrac{4}{\ell+2}$.

Puis par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 - \dfrac{4}{u_n+2} = 5 - \dfrac{4}{\ell+2}$ c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{\ell+2}$.

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$, $\quad$ l'unicité de la limite donne : $\boxed{\ell = 5 - \dfrac{4}{\ell+2}}$

Le nombre ℓ est donc une solution positive de l'équation $f(x) = x$ ainsi d'après le résultat de la question (a) iii. on obtient : $\boxed{\ell = \alpha = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2}}$

(c) i. On obtient : $\boxed{S_0 = 1}$ $\boxed{S_1 = \dfrac{14}{3} \approx 4,67}$ $\boxed{S_2 = \dfrac{457}{51} \approx 8,96}$

(d)
```
u prend la valeur 1
S prend la valeur u
n prend la valeur rentrée par l'utilisateur
Pour k allant de 1 à n faire :
     u prend la valeur 5 - 4/(u + 2)
     S prend la valeur S + u
Fin Pour
Afficher S
```

En python cela donnerait une fonction :

```python
def somme(n):
    u = 1
    S = u
    for k in range(n):
        u = 5 - 4/(u + 2)
        S = S + u
    return S
```

Après exécution de ce code, on dispose d'une fonction `somme` que l'on peut appeler dans la console :

```
>>> somme(2)
8.96078431372549
```

(e) On a montré que la suite (u_n) est croissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 = u_0 \leqslant u_n$. Ainsi chacun des $n+1$ termes dans la définition de S_n est au moins égale à 1 :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \geqslant \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ termes}} = n + 1$$

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 1 = +\infty$ ainsi, d'après le théorème des limites par comparaison :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty}$$