Devoir à la maison n°2

Rappel de quelques consignes de présentation :

- tracer un cartouche et une marge à gauche,
- passer une ligne entre deux questions et bien les numéroter,
- écrire lisiblement et sans ratures,
- encadrer les réponses aux questions.

Exercice 1 : Quelques limites (Obligatoire)

Déterminer, en justifiant avec soin, les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$
2. $v_n = \dfrac{5^n + 3^n}{6^n}$
3. $w_n = -n + \sqrt{n}$

Exercice 2 : Avec un encadrement (Obligatoire)

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \dfrac{1-\cos(n^2)}{n+2}$

1. Déterminer un encadrement de $1-\cos(n^2)$.
2. En déduire la limite de u_n.

Exercice 3 : Une suite convergente (Facultatif)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{1}{1+3} + \dfrac{1}{1+3^2} + \dfrac{1}{1+3^3} + \cdots + \dfrac{1}{1+3^n}$

ou de manière équivalente : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+3^k}$.

(a) Calculer u_1, u_2 et u_3 sous forme de fraction irréductible et en donnant une valeur (éventuellement approchée) sous forme décimale.

(b) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $\dfrac{1}{1+3^k} \leqslant \dfrac{1}{3^k}$.

(c) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$

  i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leqslant v_n$.

  ii. Calculer v_n en fonction de n (sous une forme simplifiée).

  iii. En déduire la limite de (v_n) et un majorant de (v_n).

  iv. À l'aide de ce qui précède, montrer que (u_n) est majorée par $\dfrac{1}{2}$.

(d) Montrer que (u_n) est croissante.

(e) Montrer que (u_n) est convergente. (On ne cherchera pas à déterminer la limite)

Exercice 4 : Étude d'une suite définie par récurrence (Obligatoire)

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{u_n + 2}$

On admet que cette suite est bien définie.

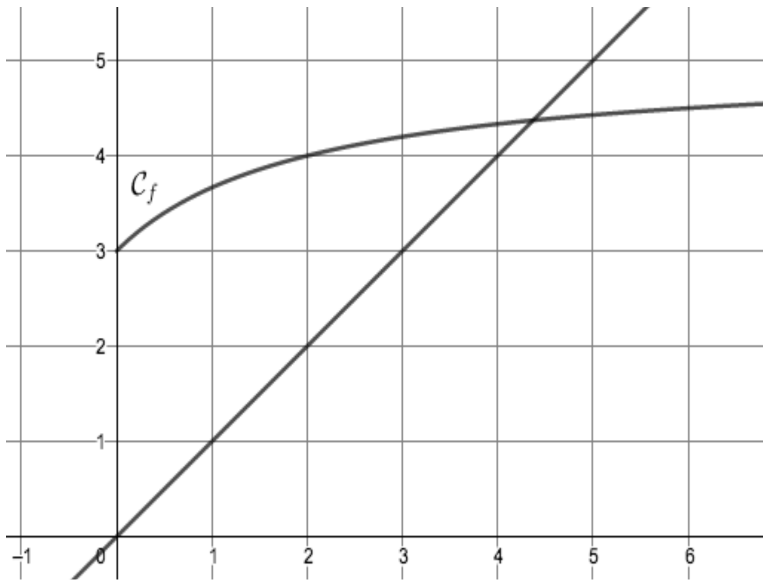
(a) Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = 5 - \dfrac{4}{x+2}$.

i. Quel lien existe-t-il entre la suite (u_n) et la fonction f ?

ii. Montrer que f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

iii. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. On note α sa solution. Donner la valeur exacte de α et une valeur approchée à 10^{-2} près.

iv. **Construire** sur le graphique ci-dessous les points A_0, A_1 et A_2 de l'axe (OI) aux abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.



(b) i. Montrer, à l'aide d'une récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a les inégalités :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

ii. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

iii. Montrer que sa limite ℓ est solution de l'équation $\ell = 5 - \dfrac{4}{\ell + 2}$ et en déduire sa valeur.

(c) On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

i. Calculer les valeurs exactes de S_0, S_1 et S_2. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

ii. Recopier et compléter l'algorithme suivant de manière à ce qu'il permette de calculer la valeur de S_n pour la valeur de n donnée par l'utilisateur.

```
u prend la valeur 1
S prend la valeur u
n prend la valeur rentrée par l'utilisateur
Pour k allant de 1 à n faire :
      ......
      ......
Fin Pour
Afficher S
```

iii. Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.