

DM1 - Corrigé

Certain calculs intermédiaires sont omis dans ce corrigé. Ils doivent figurer dans une copie!

— **Exercice 1 : Utilisation d'une suite auxiliaire** —

1. On obtient :

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{7}{9}, \text{ et } u_3 = \frac{39}{43}.$$

Attention, tous les détails de ces calculs doivent figurer sur la copie.

$$2. \text{ On a : } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{3u_n+2}{u_n+4} - 1}{\frac{3u_n+2}{u_n+4} + 2} = \frac{\frac{3u_n+2 - u_n+4}{u_n+4}}{\frac{3u_n+2 + 2u_n+8}{u_n+4}} = \frac{2u_n - 2}{5u_n + 10}.$$

Ainsi $v_{n+1} = \frac{2}{5} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{2}{5} \times v_n$. Ceci prouve que (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

$$3. \text{ On a : } v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{0 - 1}{0 + 2} = \frac{-1}{2}.$$

On en déduit, à l'aide de la formule du terme général d'une suite géométrique, que :

$$v_n = \frac{-1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n.$$

4. On inverse la relation définissant v_n à partir de u_n :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Leftrightarrow v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \Leftrightarrow v_n u_n + 2v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow v_n u_n - u_n = -2v_n - 1$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{-2v_n - 1}{v_n - 1}.$$

On en déduit l'expression de u_n en fonction de n :

$$u_n = \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n}.$$

Remarque : On peut aussi mettre le résultat sous la forme $u_n = \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^{n-1}}$