Continuité

Spécialité Maths

Année 2020-2021

Introduction

Le but de ce court chapitre est de formaliser la notion intuitivement très naturelle de continuité qui permet de disposer d'un outil théorique important pour la résolution des équations : le théorème des valeurs intermédiaires.

I Continuité sur un intervalle

Les fonctions définies par une formule ont généralement un graphe qui se dessine continûment sur chacun des intervalles où la fonction est définie. On va ici définir précisément la notion correspondante, on pourra alors donner l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

Définition (Fonction continue en un point, sur un intervalle)

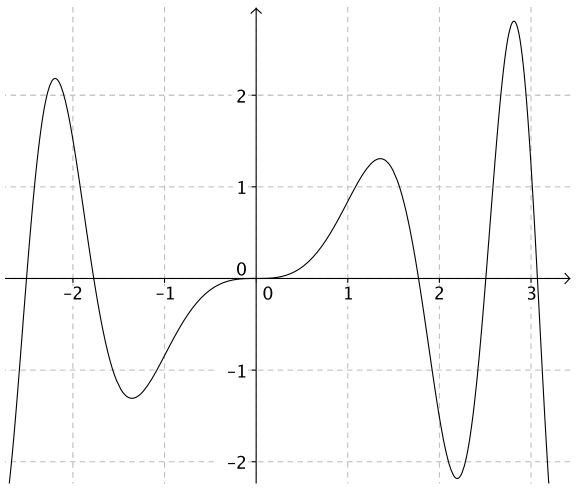
> - Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a.
> On dit que f est continue au point a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
>
> - Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
> On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de cet intervalle.

Remarques :

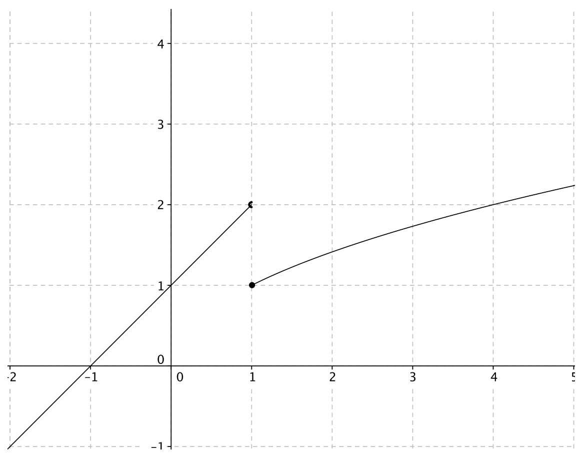
— On réservera la préposition « en » pour indiquer que la propriété est vraie pour un réel précis et la préposition « sur » lorsqu'elle est vraie pour tous les réels d'un intervalle.

— Dans un tableau de variation, une flèche sans coupure rend compte de la continuité.

Une fonction continue



Une fonction non continue



Propriété

- Les fonctions polynômes, sinus, cosinus, valeur absolue et la fonction racine carrée sont continues sur leur intervalle de définition.
- Si u et v sont continues sur I, alors $u+v$, $u.v$ et u^n sont continues sur I et la fonction $\dfrac{u}{v}$ est continue sur chacun des intervalles où elle est définie. En particulier une fonction rationnelle[1] est continue sur tout intervalle où elle est définie.
- La composée de deux fonctions continues est continue.

Preuve : Admis.

Exercice 1 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Entraînement 1

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Propriété (Dérivabilité et continuité)

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I alors elle est continue sur I.

Remarque : La réciproque est fausse (la fonction valeur absolue est un contre-exemple).

1. Une fonction rationnelle est un quotient de deux polynômes comme par exemple $x \mapsto \dfrac{-2x^2+5x-1}{x^2-4}$.

Preuve :

Propriété (Image d'une suite convergente par une fonction continue)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite qui prend ses valeurs dans I.

$$\text{Si } (u_n) \text{ converge vers } \ell \in I \text{ alors } \big(f(u_n)\big) \text{ converge } f(\ell).$$

Preuve : Admis.

Exercice 2

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \exp(u_n - 1)$.

1. On pose $g(x) = \exp(x - 1) - x$. Étudier les variations de g.
2. Montrer que (u_n) est croissante et majorée par 1.
3. Montrer que (u_n) converge vers 1.

Entraînement 2

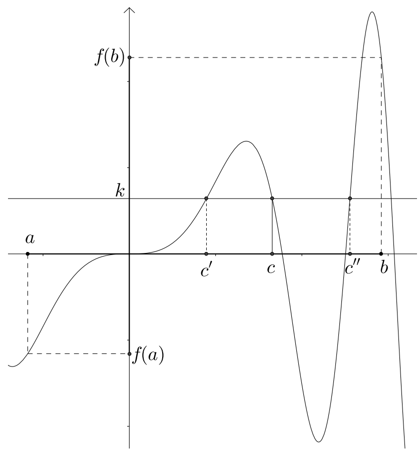
On définit la suite (u_n) par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$.

1. Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$.
2. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{5}$
3. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f continue sur un intervalle I et $a, b \in I$.

Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe (au moins) un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Preuve :

Corollaire (Théorème de la bijection)
Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x)=k$ admet une **unique** solution dans $[a;b]$. On dit que f induit une bijection de $[a;b]$ sur $[f(a);f(b)]$ ou sur $[f(b);f(a)]$ (selon la croissance/décroissance de f).

Remarque : Le résultat reste valable en remplaçant $[a;b]$ par un intervalle d'un autre type mais il faut alors déterminer les limites aux bornes de l'intervalle considéré.

Preuve :

Exercice 3 : Soit f définie par $f(x)=x^3-3x-3$. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solutions dans $\mathbb{R}$. En donner une approximation à 10^{-3} près.

Entraînement 3

On se propose de montrer que l'équation :

$$\frac{1}{1+x^2} = x \qquad \text{(E)}$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que x est solution de (E) si et seulement si $x^3 + x - 1 = 0$
2. On pose $f(x) = x^3 + x - 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solutions dans $\mathbb{R}$.
3. Conclure et donner une approximation à 10^{-3} près de la solution.

Exercice 4

Écrire une fonction python qui donne une approximation d'une solution d'une équation équation en appliquant l'algorithme de dichotomie.