Combinatoire et dénombrement

Spécialité Maths

Année 2020-2021

I Notion d'ensemble

Définition (Ensembles, ensemble vide)

> Un ensemble est une « collection » d'éléments. Un ensemble est bien défini si, pour un objet quelconque, on peut dire s'il appartient ou non à l'ensemble.
>
> L'appartenance d'un élément x à un ensemble E se note $x \in E$ et sa négation $x \notin E$.
>
> Il existe un unique ensemble qui ne contient aucun élément, on l'appelle l'ensemble vide et il se note $\varnothing$.

Remarques :

— Définir un ensemble **en extension**, c'est donner la liste de ses éléments, par exemple : $E = \{0, 3, 5, -1, 2\}$. On ne peut ainsi décrire de manière explicite que des ensembles finis, sinon il faut « tricher » avec des $\dots$: $F = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$.

— Définir un ensemble **en compréhension**, c'est donner une propriété qui caractérisent ses éléments. Par exemple $F = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{il existe } k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$.

— Il n'y a jamais d'ordre particulier pour donner les éléments d'un ensemble : $\{1, 2, 0\} = \{2, 0, 1\}$.

Exercice 1

Soient $E = \{3, -1, 2, 0, 1\}$ et $F = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant n < 7\}$.

Indiquer comment est décrit chaque ensemble et lui donner une définition en utilisant l'autre façon de faire.

Définition (Intersection, réunion, ensembles disjoints)

> Soient A et B deux ensembles.
>
> La **réunion** de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'un ou l'autre des ensembles. On le note $A \cap B$.
>
> L'**intersection** de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent simultanément aux deux ensembles. On le note $A \cup B$.
>
> Deux ensembles sont dits **disjoints** lorsque leur intersection est vide.

Exercice 2

E et F sont les ensembles définis à l'exercice précédent, donner $E \cap F$ et $E \cup F$.

Exercice 3

On note $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{il existe } p \in \mathbb{N}, n = 2p\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{il existe } q \in \mathbb{N}, n = 2q + 1\}$. Montrer que A et B sont disjoints.

Définition (Inclusion, égalité)

On dit qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F lorsque tout élément de E est un élément de F. On note alors $E \subset F$.

Lorsque $E \subset F$ et $F \subset E$, il y a égalité des ensembles : $E = F$.

Remarques :
- Ne pas confondre $\in$ et $\subset$.
- On dit aussi que F est un **sous-ensemble** de E ou une **partie** de E.
- Pour montrer l'égalité de deux ensembles on montre donc une **double inclusion**.

Exercice 4

Pour deux ensembles A et B, que signifie $A \neq B$?

II Principes additif et multiplicatif

Définition (Ensembles finis, cardinal)

On dit qu'un ensemble E est fini lorsqu'il est possible (au moins théoriquement) de donner la liste de tous ses éléments de manière explicite. On appelle alors **cardinal** le nombre de ses éléments, on le note $|E|$, $\#E$ ou $\text{card}(E)$.

Exercice 5

On considère $A = \{2, 5, -1\}$, $B = \{1, -1, -3\}$ et $C = \{-2, 0, 4, -3\}$

Quels ensembles sont disjoints ? Quel est leur cardinal ? Quel est le cardinal de la réunion de ces deux ensemble ?

Propriété (Cardinal de la réunion disjointe)

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles finis deux à deux **disjoints**. Le cardinal de leur réunion est égale à la somme des cardinaux.

$$\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \cdots + \text{card}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \text{card}(A_k)$$

Preuve : Admis

Corollaire (Cardinal du complémentaire)

Si A est un sous-ensemble de E, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A s'appelle le complémentaire de A et on le note $\overline{A}$. Son cardinal se calcule par :

$$\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$$

Preuve :

Exercice 6

Dans une classe de 33 élèves, 25 élèves étudient l'anglais, 15 l'espagnol et 5 aucunes de ces deux langues.

Combien étudient anglais et espagnol ?

Définition (Couple, produit cartésien de deux ensembles)

Soient E et F deux ensembles non vides.

Le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble des **couples** (x, y) formés d'un élément de E et d'un élément de F.

Remarques :

— Avec trois ensembles, le produit cartésien $E \times F \times G$ est l'ensemble des **triplets** (x, y, z) avec $x \in E, y \in F$ et $z \in G$.

— Avec k ensembles, le produit cartésien $E_1 \times E_2 \cdots \times E_k$ est l'ensemble des k**-uplets** ou k**-listes** $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ avec $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$, ... , $x_k \in E_k$.

— Dans un repère, les coordonnées d'un point du plan est un couple de réels, c'est à dire un élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exercice 7

On donne $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{x, y\}$.

Déterminer l'ensemble $E \times F$.

Propriété (Cardinal du produit cartésien)

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_k$ des ensembles finis. Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \cdots \times E_k$ est alors fini et :

$$\text{card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \cdots \times \text{card}(E_k)$$

Exercice 8

Sur la carte d'un restaurant, on a le choix entre 3 entrées, 4 plats et 3 desserts.
Combien de menus sont possibles ?

Définition (k-uplets d'un ensemble)

Soit E un ensemble non vide et k un entier naturel non nul.
Un k-uplet d'éléments de E est un élément de l'ensemble $E^k = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{k \text{ facteurs}}$

Propriété (Nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments)

Soit E un ensemble fini non vide et k un entier naturel non nul. On a alors :

$$\text{card}(E^k) = (\text{card}(E))^k$$

III k-uplet d'éléments distincts, permutations

Définition (Factorielle)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle factorielle de n le nombre noté $n!$ et défini par :

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Remarques :

* Dans une écriture le ! a une priorité plus grande que le produit : $2n! = 2 \times (n!)$.
* Par convention : $0! = 1$.
* $(n+1)! = (n+1) \times n!$
* $n \times (n-1)! = n!$

Exercice 9

Calculer $A = \dfrac{7!}{5!}$, $B = \dfrac{9!}{11!}$ et $C = \dfrac{(n-1)!}{(n+1)!}$ (pour $n \geqslant 1$).

Entraînement 1

Calculer en fonction de n, $D = \dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$ et $E = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Propriété (Nombre de k-uplets d'éléments distincts)

Soit E un ensemble fini à $n > 0$ éléments et k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.
Le nombre de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E est donnée par le produit :

$$\underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}_{k \text{ facteurs}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Remarque :
Les k-uplets d'éléments deux à deux distincts sont parfois appelés des **arrangements**

Définition (Permutation)

On appelle permutation d'un ensemble fini E ayant n éléments tout n-uplet d'éléments distincts de E.

Propriété (Nombre de permutations)

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est :

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

IV Nombre de combinaisons

Définition (Combinaison)

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on appelle combinaison de k éléments de E toute partie de E dont le cardinal est k.

Exercice 10

On note $E_n = \{1, \dots n\}$ avec aussi $E_0 = \varnothing$.
Déterminer la liste des combinaisons de E_0, E_1, E_2, E_3 et E_4

Propriété (Nombre de combinaisons)

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$ deux entiers, le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments est donné par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}$$

Remarque :

On a en particulier $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Preuve :

Propriété (Formule de Pascal)

Les nombres de combinaisons vérifient la relation suivante appelée formule de Pascal :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Preuve : (Bac)

Remarque : Sur la calculatrice, on obtient les nombres de combinaisons [1] par :

Exercice 11

À l'aide de la formule de Pascal, compléter le triangle des nombres de combinaison (triangle de Pascal) :

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5
0	**1**					
1						
2						
3						
4						
5						

Entraînement 2

Déterminer $\binom{6}{4}$ et $\binom{8}{3}$ en poursuivant le triangle autant que nécessaire.

Calculer $\binom{17}{8}$ à l'aide de la calculatrice.

1. Ces nombres interviennent aussi dans la célèbre formule du binôme de Newton, on les appelle aussi coefficients binomiaux.

Exercice 12

Pour un match de préparation, un entraineur de handball doit choisir 7 joueurs parmi 12.

1. Combien d'équipes différentes peut-il former ?
2. On considère maintenant que, parmi les joueurs, il y en a deux qui ne peuvent pas jouer l'un sans l'autre : soit ils jouent tous les deux, soit aucun des deux ne joue.
   Combien d'équipes différentes peut-il former ?

Propriété (Symétrie dans les nombres de combinaisons)

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on a toujours :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Remarque : Cette propriété signifie que l'on obtient les mêmes nombres en lisant une ligne du triangle de Pascal dans un sens ou dans l'autre.

Preuve :

Exercice 13

Dans le tableau de l'exercice 11. ajouter les sommes de chaque ligne au bout de celle-ci.

Propriété

Soit E un ensemble ayant n éléments.

Le nombre de parties de E est égal à : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Preuve :

Algorithmique avec Python

On rappelle que les listes Python permettent de former des collections ordonnées d'objets séparés par des virgules et accessibles par un indice qui commence à 0.

```
>>> L = []
>>> L.append(1)
>>> L
[1]
>>> L.append(2)
>>> L
[1, 2]
>>> L.append(L[0])
>>> L
[1, 2, 1]
>>> S = 0
>>> for x in L:
        S = S + x


>>> S
4
```

Exercice 14

On donne la fonction `somme_Pascal(L)` qui prend une liste en paramètre et renvoie une liste :

```
def somme_Pascal(L):
    M = []
    p = 0
    for n in L:
        M.append(p + n)
        p = n
    M.append(p)
    return M
```

Que renvoie `somme_Pascal([1])` ?
Que renvoie `somme_Pascal([1, 1])` ?
Que renvoie `somme_Pascal([1, 2, 1])` ?
Poursuivre autant que nécessaire pour comprendre et expliquer ensuite.
En déduire une fonction qui calcule les nombres de combinaisons.