Dérivation et convexité des fonctions

Spécialité Maths

Année 2020-2021

Introduction

On a vu en classe de première comment le nombre dérivé permettait de mesurer la « vitesse » d'une fonction en un point, ce qui mène ensuite à la notion de fonction dérivée.

Dans un premier temps, on rappelle et approfondit ces notions.

On expose ensuite la notion de convexité des fonction qui permet d'obtenir facilement des inégalités.

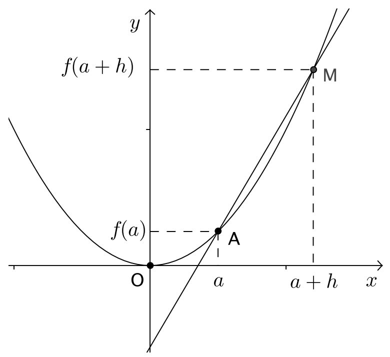
I Rappels et compléments sur la dérivation des fonctions

Définition (Taux d'accroissement)

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$.
À tout nombre $h \neq 0$ tel que $a+h$ soit dans I on associe le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ce nombre est le coefficient directeur de la corde tracée entre les points d'abscisse a et $a+h$ de la courbe représentative de f.



Remarques :
— Le taux d'accroissement n'existe pas pour $h = 0$ car les points A et M sont alors confondus et la corde n'existe plus.
— Pour comprendre ce qui suit il faut bien avoir à l'esprit que **A est fixe** et que h est variable donc **M mobile**.

On veut mesurer la vitesse de f en $x = a$, on cherche ainsi à déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe. Or la tangente est la position limite de la corde lorsque h se rapproche de 0 (c'est à dire quand M tend à se confondre avec A) mais le taux d'accroissement n'existe pas pour $h = 0$ on doit donc déterminer la « valeur limite » de ce taux lorsque h tend vers 0 ce qui mène à la définition suivante :

Définition (Fonction dérivable en un point, nombre dérivé)

On dit qu'une fonction f est dérivable en a lorsque $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe **dans** $\mathbb{R}$.
On dit alors que cette limite est le nombre dérivé de f en a et on la note $f'(a)$.

Remarque : Dans la définition, on pourrait remplacer la limite par $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. On a ainsi deux définitions équivalentes du nombre dérivé :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad\qquad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exercice 1 : Déterminer une limite à l'aide d'un nombre dérivé

Déterminer $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\mathrm{e}^{x-1} - \mathrm{e}}{x - 2}$

Entraînement 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$

Propriété (Tangente à la courbe représentative d'une fonction)

Si une fonction est dérivable en a alors sa courbe représentative admet une droite tangente $(\mathcal{T}_a)$ en son point d'abscisse a dont le coefficient directeur est $f'(a)$.

L'équation réduite de $(\mathcal{T}_a)$ est donnée par $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Preuve : Admis. □

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}_a$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a pour tout $a > 0$.
2. Montrer que $\mathcal{T}_a$ ne rencontre $\mathcal{C}_f$ qu'en un unique point.

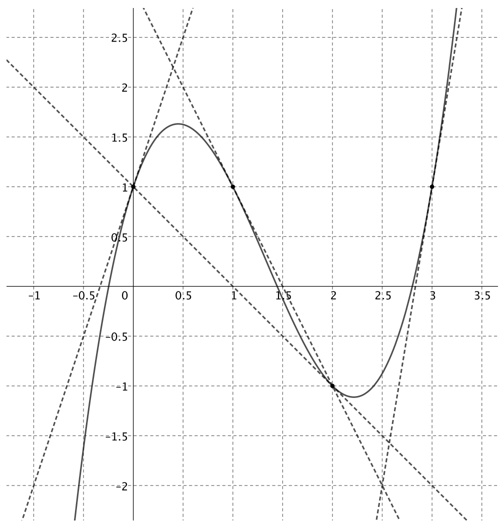
Entraînement 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}_a$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a pour tout $a \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathcal{T}_a$ ne rencontre $\mathcal{C}_f$ qu'en un unique point.

Exercice 3

Sur la figure ci-contre, on a tracé 4 tangentes à la courbe représentative de la fonction f.
Par lecture graphique, donner les valeurs des nombres dérivés qui s'en déduisent.



Définition (Fonction dérivée)

Si une fonction f est dérivable en tous les points x d'un intervalle I, on dit que f est dérivable **sur** I et la fonction qui donne les nombres dérivés pour tout x de I est la fonction dérivée de f que l'on note f'

Remarque : La notation $(f(x))'$ est impropre ainsi on n'écrira **jamais** $(x^2)' = 2x$. On peut, à la place, utiliser une notation familière des physiciens : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x$.

Propriété (Rappel des dérivées vues en première)

Si f est définie par $f(x) =$	k (constante)	x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{x}$	e^x
alors f est dérivable sur $I =$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]0, +\infty[$	$\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$
et $f'(x) =$	0	nx^{n-1}	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	e^x

Preuve : Admis. □

Propriété (Dérivation et opérations algébriques)

Pour u et v deux fonctions dérivables sur I et k une constante, on a :

Si $f =$	ku	$u+v$	$u.v$	$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{u}{v}$
alors f est dérivable sur	I	I	I	I si v ne s'y annule pas	
et $f' =$	ku'	$u'+v'$	$u'v+uv'$	$\dfrac{-v'}{v^2}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Preuve : Admis. □

Exercice 4 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -4x^3 + \dfrac{1}{4}x^2 - 7x + 10$,
2. $g(x) = (x^2+1)\sqrt{x}$
3. $h(x) = \dfrac{1-2x^2}{x-2}$
4. $k(x) = \dfrac{e^x+1}{x^2-1}$

Entraînement 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{2} + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x + 1}$
2. $g(x) = x^2 + 1 - \dfrac{1}{x^2 + 1}$
3. $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$
4. $k(x) = \left(\sqrt{2x+1} + x^2\right)^2$

Définition (Dérivée seconde)

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I et que la fonction f' est à son tour dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable et on note alors $f'' = (f')'$ la dérivée de la dérivée de f. On dit alors que f'' est la dérivée seconde de f.

Remarque : En recommençant (si toutes les fonctions intermédiaires sont bien dérivables), on peut définir la dérivée n-ième que l'on note $f^{(n)}$.

Exercice 5 Soit $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Faire une conjecture sur la dérivéee n-ième de f. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Entraînement 4

Mêmes consignes qu'à l'exercice précédent pour la fonction g définie par $g(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$.

Définition (Composition des fonctions)

Si f est une fonction définie sur un intervalle I qui prend ses valeurs dans un intervalle J sur lequel est définie une fonction g alors on peut définir sur I une fonction $x \mapsto g(f(x))$.

On dit que cette nouvelle fonction est la composée de f par g et on la note $g \circ f$ ainsi :

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Exercice 6 Pour f, g et h définie par : $f(x) = x + \sqrt{x+1}$, $g(x) = x^2 - 1$ et $h(x) = x - \dfrac{1}{x}$.
Déterminer les expression des composées suivantes : $f \circ g$, $g \circ f$, $h \circ g$ et $g \circ g$.

Entraînement 5
Faire de même pour $g \circ h$, $h \circ f$, $f \circ h$.

Propriété (Dérivation des fonctions composées)
Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I qui prend ses valeurs dans un intervalle J sur lequel est dérivable une fonction g alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)'(x) = g' \circ f(x) \times f'(x).$$

Preuve : Admis.

Corollaire (Dérivation de e^u, $\sqrt{u}$ et u^n)
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et $n \in \mathbb{Z}^*$:.

Si $f =$	e^u	$\sqrt{u}$ avec $u(x) > 0$	u^n $u(x) \neq 0$ si $n \leqslant -1$
alors f est dérivable sur I et $f' =$	$u'\mathrm{e}^u$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$nu^{n-1}u'$

Preuve :

Exercice 7 : Calculer les dérivées des fonctions suivante :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}, \qquad g(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 \qquad h(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

Entraînement 6 :

Calculer les dérivées des fonctions suivante : $f(x) = (x + \mathrm{e}^{-x})^{-2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$.

Exercice 8 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes f et g.

$$f(x) = \left(x - \frac{2}{x}\right)^4 \qquad g(x) = \frac{x}{e^{x^2}+1}$$

Entraînement 7

Calculer les dérivées des fonctions suivantes f et g.

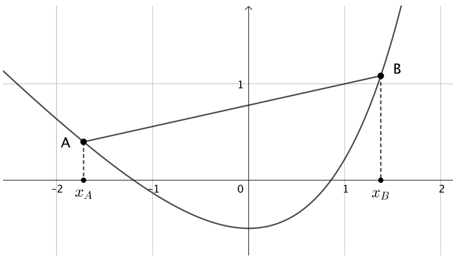
$$f(x) = \frac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}} \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{(2x^2+1)^n}$$

II Fonctions convexes

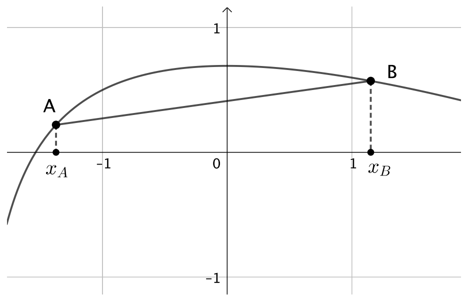
Définition (Fonction convexe / concave)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

On dit que f est convexe sur I lorsque : « quels que soient les points A et B de $\mathcal{C}$ avec $x_A, x_B \in I$, le segment [AB] est situé au dessus de la courbe sur $[x_A, x_B]$.



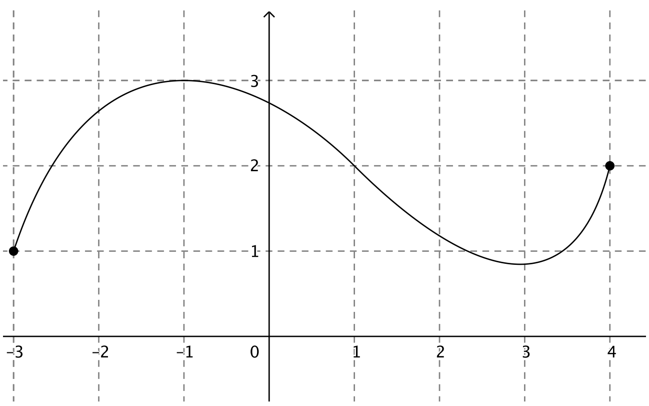
On dit que f est concave sur I lorsque : « quels que soient les points A et B de $\mathcal{C}$ avec $x_A, x_B \in I$, le segment [AB] est situé en dessous de la courbe sur $[x_A, x_B]$.

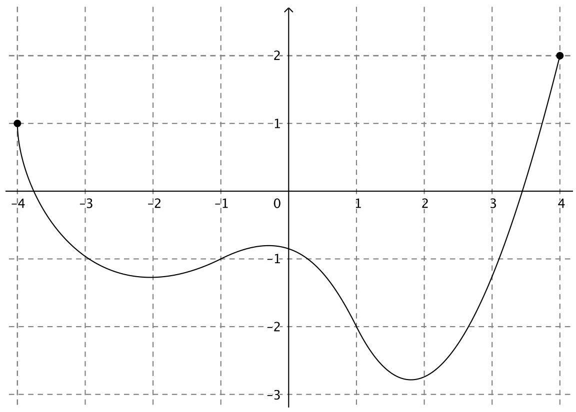


Remarque : On admet sans démonstration que f est convexe si et seulement si $-f$ est concave.

Exercice 9

Colorier en bleu les intervalles sur lesquels la fonction est convexe et en rouge ceux où elle est concave.





Entraînement 8

On donne $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$ et $g(x) = \dfrac{8}{3+x^2} - 1$.

À l'aide de votre calculatrice [1], déterminer graphiquement les intervalles sur lesquels chaque fonction est convexe ou concave.

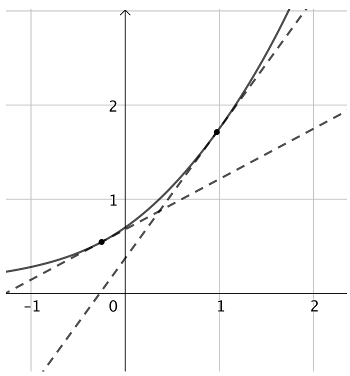
Indication : Ici, les changements de concavité se font en des valeurs entières de x.

1. Il est aussi possible d'utiliser **Geogebra** sur un ordinateur.

Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) f est convexe sur I.
(b) f' est croissante sur I.
(c) f'' est positive sur I.
(d) La courbe représentative $\mathcal{C}$ de f est située au-dessus de toutes ses tangentes.

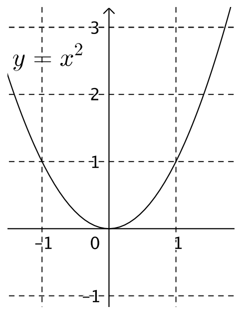


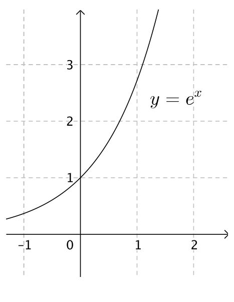
Remarque : En passant à $-f$, on en déduit facilement un énoncé similaire pour les fonctions concaves. En particulier pour montrer qu'une fonction est concave, il suffit de prouver que sa dérivée est décroissante ou que sa dérivée seconde est négative.

Preuve : Admis sauf pour (c) implique (d) :

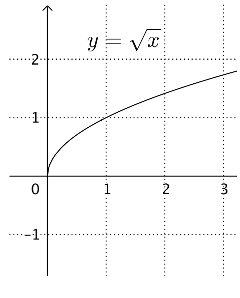
Corollaire

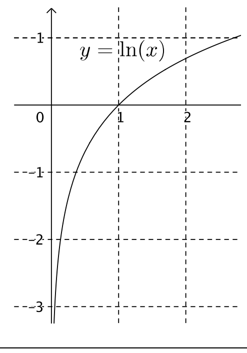
Les fonctions carré et exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.





Les fonctions racine carré et ln (logarithme népérien) sont concaves sur $]0, +\infty[$.





Remarque : La fonction logarithme népérien fera l'objet d'un chapitre à venir.

Exercice 10 : Retour sur l'inégalité de Bernoulli

Pour $n \geqslant 1$, on pose $f(x) = (1+x)^n$.

1. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
3. En déduire l'inégalité de Bernoulli : « Pour tout $x \geqslant 0$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

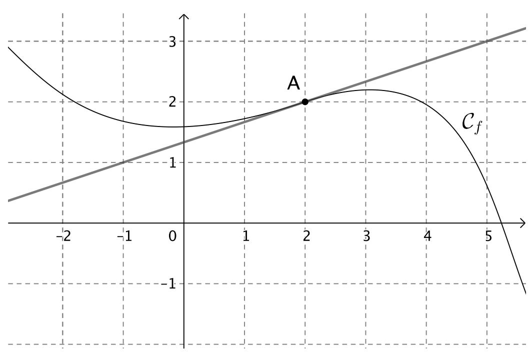
Entraînement 9

Pour $a > 0$ fixé quelconque, on pose $f(x) = \sqrt{a+x}$.

1. Montrer que f est concave sur $]-a, +\infty[$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
3. En déduire l'inégalité : « Pour tout $x > -a$, $\sqrt{a+x} \leqslant \dfrac{2a+x}{2\sqrt{a}}$.

Définition (Point d'inflexion)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.
On dit que le point $\mathrm{A}(a, f(a))$ de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ lorsqu'au point A, la courbe traverse sa tangente.



Propriété (Condition nécessaire et suffisante d'inflexion)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.

— Le point $\mathrm{A}(a, f(a))$ de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion si et seulement si la concavité de f change en a.

— Si f est deux fois dérivable, alors $\mathrm{A}(a, f(a))$ est un point d'inflexion si et seulement si f'' change de signe en a.

Exercice 11

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Montrez que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminez-le.

Exercice 12

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{8}{3+x^2} - 1$.

Montrez que $\mathcal{C}_g$ admet deux points d'inflexion et déterminez-les.

Entraînement 10

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$.

Montrez que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminez-le.