Géométrie dans l'espace

Spécialité Maths

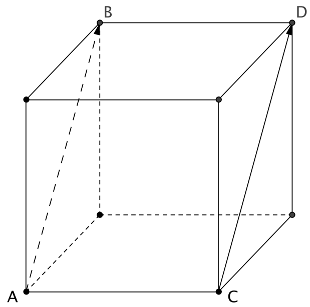
Année 2020-2021

I Calcul vectoriel dans l'espace

Définition (Vecteurs de l'espace)

On étend à l'espace la notion de vecteur vue en géométrie plane :

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme éventuellement aplati.



Remarques :

— Pour tout point A et tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM}$.

— Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par sa direction : celle de la droite (AB), son sens : de A vers B et sa norme que l'on note $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

— La somme de deux vecteurs se définie comme dans le plan avec en particulier la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et la règle du parallélogramme.

— Le produit par un nombre réel est définie par $k \times \overrightarrow{u}$ est le vecteur dont :
$*$ la direction est celle de $\overrightarrow{u}$,
$*$ le sens est celui de $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$ et le sens inverse sinon
$*$ et pour la norme, on a $\|k \times \overrightarrow{u}\| = |k| \times \|\overrightarrow{u}\|$.

— La notion de vecteurs colinéaires est la même que pour le plan ($\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils ont même direction c'est à dire si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k \times \overrightarrow{v}$) et elle est reliée de la même façon à l'alignement (A, B et C alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires) et au parallélisme (les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires).

Propriété (Propriétés algébriques de la somme et du produit par un réel)

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et quels que soient les réels k et k' on a toujours :

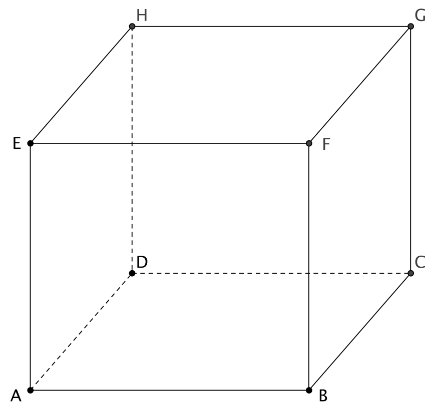
1. $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$,
2. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

Preuve : Admis □

Remarque : Attention ! $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ n'est **pas** égal à $3\overrightarrow{AC}$

Exercice 1 :

Construire les points M, N et P tels que :



$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$

$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \frac{3}{2}\overrightarrow{HG}$

$\overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{DC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{EG}$

Entraînement 1

Reproduire la figure de l'exercice précédent et construire les points M, N et P tels que :

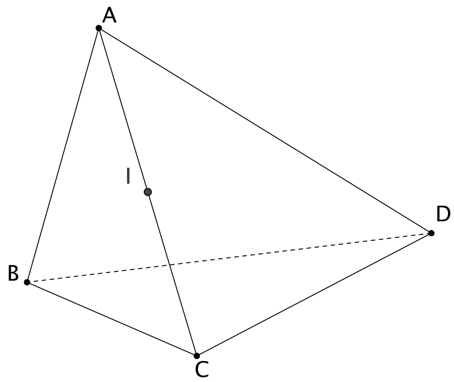
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$

$\overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CH}$

Exercice 2

On considère un tétraèdre ABCD et on place le point I milieu de [AC].



1. Construire les points J et K respectivement tels que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DK} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
2. Démontrer que (IJ) et (CK) sont parallèles.
   Indication : exprimer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BK}$ chacun en fonction de $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AD}$

Entraînement 2

On reprend la figure de l'exercice précédent.

1. Construire les points J et K respectivement tels que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CK} = -\overrightarrow{CD}$
2. Démontrer que K, I et J sont alignés.

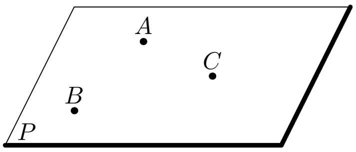
II Droites et plans de l'espace

Propriété (Axiomes d'incidence)

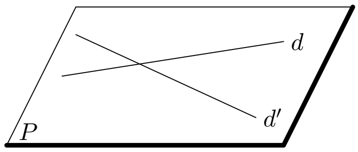
1. Par deux points distincts A et B de l'espace, il passe une et une seule droite que l'on note (AB).
2. Par trois points non alignés A, B et C, il passe un et un seul plan que l'on note (ABC).
3. Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB) sont sur P, on dit que la droite (AB) est incluse dans P.

On en déduit trois façons de définir un plan P :

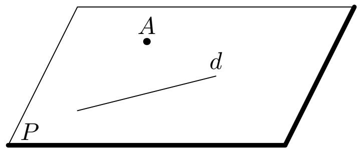
par trois points non alignés,



par deux droites sécantes,



par une droite et un point extérieur à celle-ci.



Remarque : Les propriétés de la géométrie plane s'appliquent dans les plans de l'espace.

Propriété (Caractérisation vectorielle d'une droite de l'espace)

Soit A un point donné de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace pour lesquels il existe un nombre t dans $\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM}= t\vec{u}$ est la droite $(\mathscr{D})$ passant par A et admettant $\vec{u}$ comme vecteur directeur.

$$\mathrm{M} \in (\mathscr{D}) \iff \exists\, t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM}= t\vec{u}$$

Exercice 3

On considère trois points A, B et C non alignés dans l'espace.

I est le milieu de [AB] et J est défini par $\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

1. Faire une figure.
2. Montrer que le point C est sur la droite (IJ).

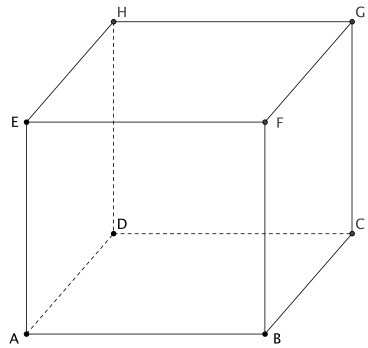
Définition (Vecteurs coplanaires)

> On dit que des vecteurs sont coplanaires lorsque l'on peut tracer des représentants de chacun d'eux à partir d'un même point en restant dans un unique plan contenant ce point.

Remarques : Le résultat est indépendant du point choisi. Deux vecteurs sont toujours coplanaires.

Exercice 4 :

Donner des vecteurs coplanaires dans le cube.



Propriété (Caractérisation des triplets de vecteurs coplanaires)

1. Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe trois réels a, b et c, non tous nuls, tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.
2. Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires si, et seulement si, l'égalité $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w} = \vec{0}$ n'est vraie que pour $a = b = c = 0$.

Preuve : Admis. □

Exercice 5

On reprend la figure de l'exercice précédent. On note I le milieu de [HF].

Montrer que $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont coplanaires.

Entraînement 3

On reprend la figure de l'exercice 4. On note I et J les milieux respectifs de [DC] et [CB].

Montrer que $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont coplanaires.

Propriété (Équation paramétrique d'un plan)

Soient A un point de l'espace et deux vecteurs **non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnés.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ avec x et y des réels quelconques est un plan $\mathcal{P}$ passant par A.

Remarques :

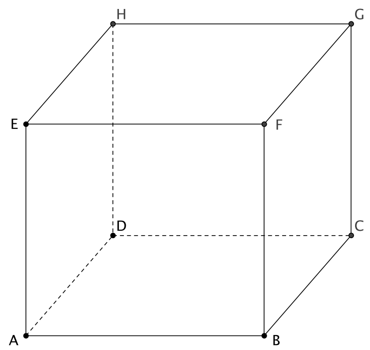
— On dit qu'un vecteur de la forme $x\vec{u} + y\vec{v}$ avec x et y des réels quelconques que c'est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

— L'ensemble des vecteurs de la forme $x\vec{u} + y\vec{v}$ avec x et y des réels quelconques s'appelle la **direction** du plan $\mathcal{P}$, c'est aussi l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MP}$ où M et P sont deux points quelconques du plan $\mathcal{P}$.

— Pour A, B et C trois points non alignés, le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ avec x et y des réels quelconques.

Exercice 6

1. Placer les milieux I de [AB] et J de [AD]
2. Construire les point K et L tels que :
$$\overrightarrow{EK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EG}$$
3. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ chacun comme combinaisons linéaires de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$
4. Calculer $2\overrightarrow{IJ} + 3\overrightarrow{IK}$.
5. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ et ensuite pour les points I, J, K et L ?

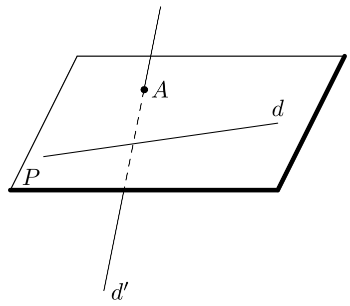


III Positions relatives des droites et des plans dans l'espace

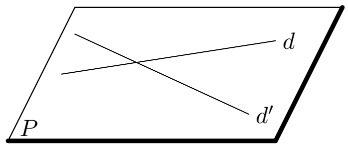
Propriété (Positions relatives de deux droites)

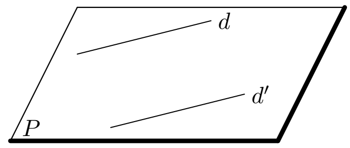
Soient d et d' deux droites de l'espace.
Il n'y a que deux possibilités :

– Il n'existe aucun plan contenant ces deux droites, elles sont dites non coplanaires.
Tout plan P contenant d ne rencontre alors d' qu'en un point au plus.



– Il existe un plan P contenant ces deux droites, elles sont alors dites coplanaires.
Les droites d et d' sont alors sécantes ou parallèles (éventuellement confondues).





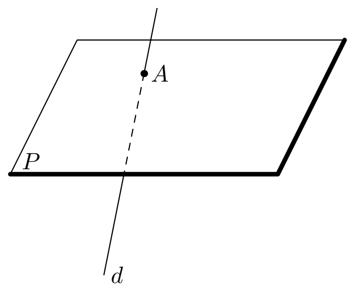
Remarques :
- dans l'espace deux droites peuvent n'avoir aucun point en commun sans être parallèles pour autant,
- deux droites strictement parallèles définissent un plan.

Propriété (Positions relatives d'une droite et d'un plan)

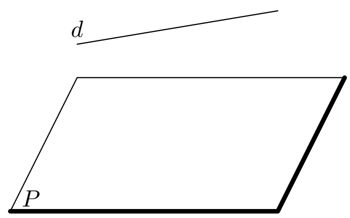
Soient d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et P un plan de l'espace dont la direction est engendrée par $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires :

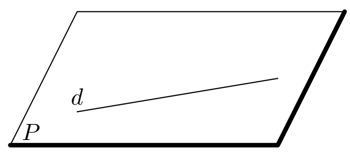
– La droite d et le plan P n'ont qu'un unique point A en commun, ils sont dits sécants.



Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires on a alors deux possibilités :
– La droite d et le plan P n'ont aucun point en commun, on dit alors que la droite d est strictement parallèle au plan P.



– La droite d est incluse dans le plan P.

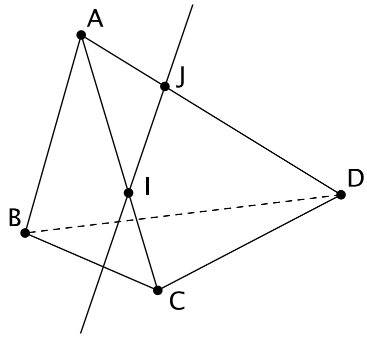


Remarques :
— Dans les deux derniers cas on dit que d est parallèle à P.
— Si une droite est parallèle à un plan et possède un point en commun avec ce plan alors elle est y est incluse.
— Si deux droites sont parallèles alors tout plan qui est sécant avec l'une est sécant avec l'autre.

Exercice 7

On considère un tétraèdre ABCD et on place deux points I et J respectivement sur [AC] et [AD].

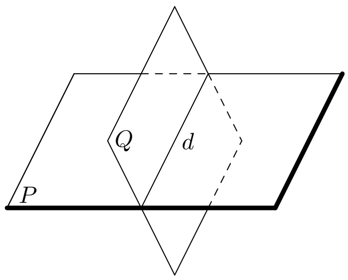
1. Les droites (IJ) et (BD) sont-elles sécantes ? Justifier.
2. On suppose que les droites (IJ) et (DC) ne sont pas parallèles. Déterminer en justifiant l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCD).



Propriété (Positions relatives de deux plans)

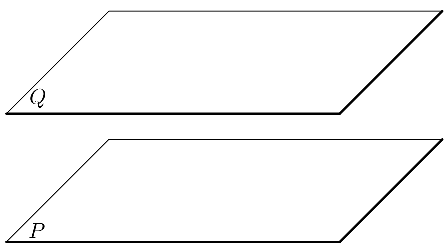
Soient P et Q deux plans de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

– les plans P et Q ont un point commun et sont distincts, alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point.



– les plans sont confondus.

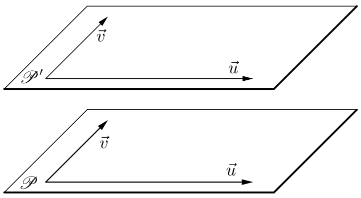
– ils n'ont aucun point commun, on dit alors que les plans sont strictement parallèles.



Remarques :
- on déduit du premier point que si deux plans distincts P et Q ont deux points communs A et B alors il sont sécants suivant la droite (AB),
- dans les deux derniers cas ont dit que P et Q sont parallèles.

Propriété

Deux plan $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles si et seulement si deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$ sont respectivement égaux à deux vecteurs du plan $\mathscr{P}'$.

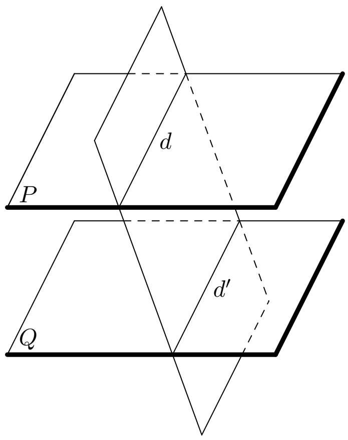


Preuve : Admis

Propriété (Section de plans parallèles)

Soient P et Q deux plans parallèles.

Tout plan qui coupent P coupe aussi Q et les deux droites d'intersections sont parallèles.



Preuve : Admis

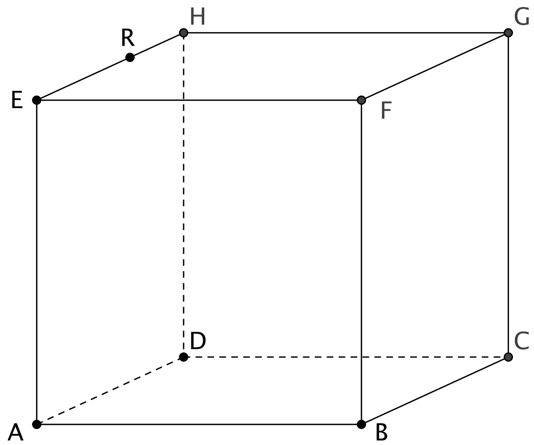
Remarque : on admet aussi sans démonstration que si deux plans sont parallèles, toute droite qui coupe l'un coupe aussi l'autre.

Exercice 8

On considère le cube ABCDEFGH et on marque un point R de [EH].

Déterminer et construire la section du cube par le plan P passant par R et parallèle à (AFH).

- -
- -
- -
- -
- -
- -
- -



IV Bases et repères de l'espace

Propriété-Définition (Base des vecteurs de l'espace)
Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{v}$ de l'espace il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tels que

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

On dit que le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base des vecteurs de l'espace et le triplet (x, y, z) forme les coordonnées du vecteur $\vec{v}$.

Preuve :

Remarques :

1. On définit alors un repère de l'espace en ajoutant un point O pris comme origine ; c'est un quadruplet $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base des vecteurs de l'espace.
2. Le point O étant fixé, à tout point M de l'espace est associé un unique vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ sont alors celle[1] du point M.

1. La nouvelle coordonnée s'appelle la *cote*.

3. Les formules usuelles de la géométrie analytique du plan s'étendent à l'espace en ajoutant à chaque fois un troisième terme, c'est en particulier le cas pour les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, de la somme de deux vecteurs, du produit d'un vecteur par un scalaire et du milieu d'un segment.
4. Le repère ou la base sont orthonormés si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont tous de norme égale à 1 et deux à deux orthogonaux. La formule usuelle de la distance dans le plan se généralise alors sous la forme :

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Propriété (Représentation paramétrique d'une droite de l'espace)

Soit A un point donné de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace pour lesquels il existe un nombre t dans $\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM}= t\vec{u}$ est la droite $(\mathscr{D})$ passant par A et admettant $\vec{u}$ comme vecteur directeur.

$$\mathrm{M} \in (\mathscr{D}) \iff \exists\, t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM}= t\vec{u}$$

Pour $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $A(x_A, y_A, z_A)$ on a ainsi la représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A + at \\ y & = & y_A + bt \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z & = & z_A + ct \end{array}\right.$$

Remarques :

1. Il n'y a pas unicité de A ni de $\vec{u}$ ici donc **pas « d'identification »** SVP !!
2. Le quantificateur existentiel est sous-entendu dans cette écriture qu'il faut comprendre sous la forme « M(x, y, z) est sur la droite si et seulement si il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que ... ».

Exercice 9 :

Donner une équation paramétrique de (BH) dans $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.