Limites d'une fonction

Spécialité Maths

Année 2020-2021

Introduction

On étend ici aux fonctions la notion de limite vue pour les suites. Il y a cependant une différence notable : pour une suite, on ne peut étudier que le comportement lorsque n tend vers $+\infty$ alors que pour une même fonction il existe a priori plusieurs limites à étudier : pour x tend vers $+\infty$ mais aussi pour x tend vers $-\infty$ ainsi que pour x tend vers un nombre $a \in \mathbb{R}$.

I Limites en $+\infty$ et $-\infty$ d'une fonction, asymptotes horizontales

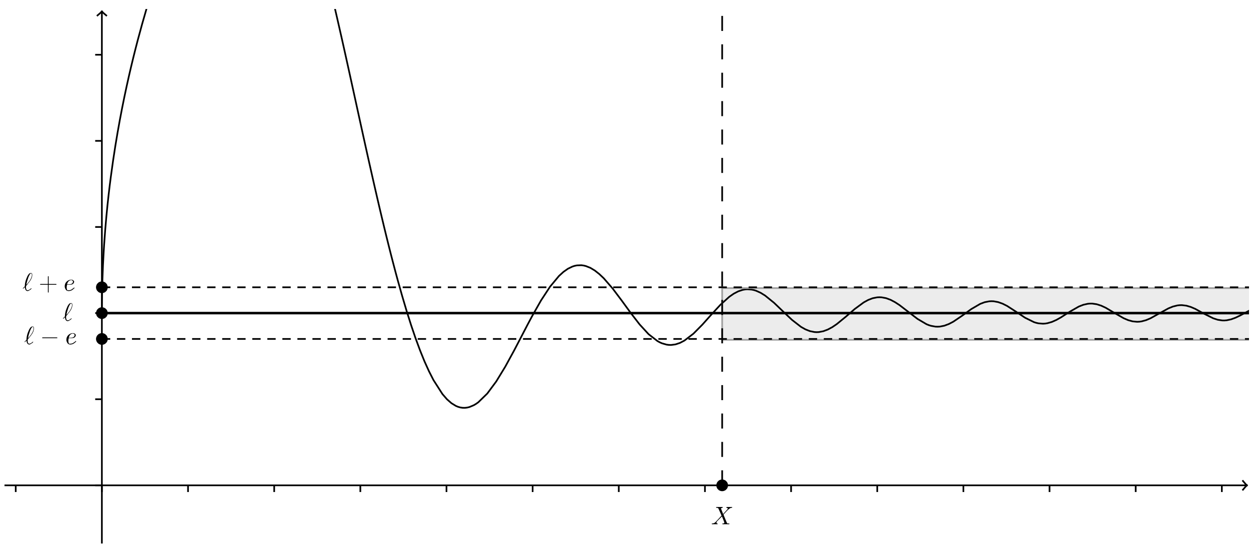
Définition (Limite finie en $+\infty$)

Soient f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $[A, +\infty[$ et $l \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet le nombre l comme limite en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ lorsque tout intervalle ouvert contenant l, contient toutes les valeurs de $f(x)$ quitte à prendre x assez grand.

Interprétation géométrique : On dit alors que la droite $(d) : y = l$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.

Illustration : Sur la figure ci-dessous, la fonction représentée prend ses valeurs dans l'intervalle $]\ell - e, \ell + e[$ pour $x > X$.



Remarques :

— On utilisera rarement la définition pour déterminer une limite, **mais il faut la connaître et la comprendre.**

— Une fonction définie au moins sur un intervalle du type $[A, +\infty[$ n'a pas toujours de limite (finie ou même infinie) comme la fonction sinus.

— On ne peut pas supposer *a priori* qu'une limite existe pour la déterminer et il est faux de penser que cela justifierait a posteriori l'existence.

— On a une définition analogue pour la limite en $-\infty$.

Exercice 1

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Entraînement 1

Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$. Attention ici c'est en $-\infty$!

Exercice 2

Montrer que la fonction sin n'admet pas de limite en $+\infty$

Définition (Limite infinie en $+\infty$)

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $[A, +\infty[$.

— On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ lorsque tout intervalle $]B; +\infty[$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ quitte à prendre x assez grand.

— On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ lorsque tout intervalle $]-\infty; C[$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ quitte à prendre x assez grand.

Remarque :
On a une définition analogue pour $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 3
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Entraînement 2
Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

Propriété
On a les limites usuelles suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \text{ (pour } n \geq 1\text{)},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ (pour } n \geq 1\text{)},$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty \text{ (pour } n \geq 1 \textbf{ pair}\text{)}, \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty \text{ (pour } n \geq 1 \textbf{ impair}\text{)},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ (pour } n \geq 1\text{)}.$$

II Limites d'une fonction en $a \in \mathbb{R}$, asymptotes verticales

Les fonctions considérées ici sont définies au moins sur un intervalle ouvert contenant a sauf éventuellement en a ou sur un intervalle ayant a comme borne (du type $]\ldots, a[$ ou $]a, \ldots[$).[1]

Définition (Limite infinie à gauche de a)

Soit f définie au moins sur un intervalle du type $]\ldots, a[$.
On dit que f admet $+\infty$ comme limite à gauche de a et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$ lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi grand que voulu quitte à prendre x suffisamment proche de a mais avec $x < a$.
On dit alors que la droite $(d) : x = a$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C}_f)$ à gauche de a.

1. Il faut disposer des valeurs de la fonction pour des x arbitrairement proches de a, au moins d'un côté.

Remarques :

— On a une définition analogue pour $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$.

— En omettant la condition $x < a$ dans la définition on obtient celle pour $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ puis sur ce modèle on a ensuite la définition de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exercice 4

Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$

Entraînement 3

Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Si les limites à droite et à gauche sont les mêmes alors tout se passe bien :

Propriété (Coïncidence des limites à droite et à gauche)

— Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

— Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Preuve : Admis. □

Propriété (Limites usuelles en a)

Soit a un réel donné quelconque, on a les limites usuelles suivantes :

— Pour n entier naturel **impair**, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$

— pour n entier naturel **pair**, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$.

— $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty$

Preuve : Admis. □

Exercice 5

Déterminer les limites de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + x - 2}$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures puis supérieures.

Entraînement 4

Déterminer les limites de $f(x) = \dfrac{6 - 3x}{x^2 - 4x + 4}$ lorsque x tend vers 2 par valeurs inférieures puis supérieures.

Définition (Limite finie à gauche en $a \in \mathbb{R}$)

Soient f définie au moins sur un intervalle de la forme $[x_0, a[$ et l un réel donné.

On dit que f admet l comme limite à gauche de a et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = l$ lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi proche de l que voulu quitte à prendre x suffisamment proche de a mais avec $x < a$.

Remarque :
On a une définition analogue pour la limite à droite : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = l$.

Définition (Limite finie en $a \in \mathbb{R}$)

Soient f définie au moins sur un intervalle ouvert contenant a sauf éventuellement en a et l un réel donné.

On dit que f admet l comme limite en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi proche de l que voulu quitte à prendre x suffisamment proche de a (indépendamment de la position de x par rapport à a).

Exercice 6 Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{x}{|x|}$

Entraînement 5

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x}{|x|}$. Que dire de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$?

Propriété (Coïncidence des limites à droite et à gauche)

Soient f définie au moins sur un intervalle ouvert contenant a sauf éventuellement en a et l un réel donné.

$$\text{Si } \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = l \text{ et } \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = l \text{ alors } \lim_{x\to a} f(x) = l.$$

Preuve : Admis. □

Théorème (Unicité de la limite)

Si une fonction admet une limite en a (réel ou $+\infty/-\infty$) alors cette limite est unique.

Preuve : Admis. □

III Calcul des limites

Propriété (Limite d'une somme)

Soient u et v deux fonctions admettant une limite (finie ou infinie) quand x tend vers a (éventuellement à droite ou à gauche ou avec $+\infty$ ou $-\infty$ à la place de a)

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) =$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} v(x) =$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} u(x)+v(x) =$						

Preuve : Admis. □

Exercice 7

Calculer les limites : a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} + 2$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-2}{x+3}$.

Entraînement 6

Calculer les limites : a) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \dfrac{2x+3}{x+1} + 2$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

Propriété (Limite d'un produit)

Soient u et v deux fonctions admettant une limite (finie ou infinie) quand x tend vers a (éventuellement à droite ou à gauche ou avec $+\infty$ ou $-\infty$ à la place de a)

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) =$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} v(x) =$	l'	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
alors $\lim\limits_{x \to a} u(x) \times v(x) =$							

Preuve : Admis. □

Exercice 8

Déterminer les limites : a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

Entraînement 7

Déterminer les limites : a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x\sqrt{x} - x^2$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+3}{x^2}$.

Propriété (Limite d'un inverse)

Soit u une fonction admettant une limite (finie ou infinie) quand x tend vers a (éventuellement à droite ou à gauche ou avec $+\infty$ ou $-\infty$ à la place de a), on a :

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) =$	$l \neq 0$	0 par valeurs positives	0 par valeurs négatives	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{u(x)} =$					

Preuve : Admis. □

Remarques :
- par valeurs positives / négatives signifie que la fonction garde un signe constant dans un intervalle correspondant au comportement de x considéré dans la limite.
- On a énoncé une propriété sur la limite d'un produit et d'un inverse, ils permettront de conclure pour le quotient dans tous les cas où c'est possible à l'aide de :

$$\frac{u(x)}{v(x)} = u(x) \times \frac{1}{v(x)}.$$

Exercice 9

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$.

Entraînement 8

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 3x}{1 - 2x^2}$.

Définition (Fonction composée de deux fonctions)

Si f et g sont deux fonctions, on note $g \circ f$ la fonction définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Remarque : Attention ici l'ordre est trompeur, c'est la fonction f qui agit en premier alors qu'elle est placée en deuxième position dans l'écriture.

Exercice 10

On a $u(x) = x^2 + 1$, $\quad v(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\quad w(x) = \sqrt{x}$.

1. Déterminer les expressions des fonctions $f = u \circ v$, $g = w \circ u$ et $h = v \circ w$.
2. La fonction $t(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ est-elle la composée de certaines des fonctions u, v et w ?

Théorème (Limite d'une fonction composée)

Pour a, b et c des réels ou désignant les symboles $-\infty$ ou $+\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$

Preuve : Admis. □

Exercice 11 :

On admet que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Entraînement 9

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2+1}$. (On pourra utiliser une expression conjuguée)

Théorème (Limite de la composée d'une suite et d'une fonction)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite dont les termes sont dans I. Pour a et b des réels ou désignant les symboles $-\infty$ ou $+\infty$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$.

Preuve : Admis. □

IV Limites et comparaison

Théorème des gendarmes

1. Soient f, g et h trois fonctions définies au moins sur un intervalle du type $]\alpha;+\infty[$.
   Si pour $x > \alpha$ on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$
   alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$.
2. Soient f, g et h trois fonctions définies au moins sur un intervalle du type $]-\infty;\beta[$.
   Si pour $x < \beta$ on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = l$
   alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = l$.
3. Soient f, g et h définies au moins sur un intervalle ouvert $]u,v[$ contenant a.
   Si pour $x \in]u,v[$ on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$
   alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

Remarque : Le dernier point reste valable pour des limites à droite ou à gauche.

Preuve : Admis. □

Exercice 12

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Entraînement 10

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+\cos x}{2x-1}$.

Attention, comme pour les suites, sans l'hypothèse d'égale limite pour les fonctions majorantes et minorantes, on ne peut rien faire. En particulier g peut ne pas avoir de limite. (Voir, par exemple, pour $x \to +\infty$ les fonctions $f(x) = -1$, $g(x) = \sin(x)$ et $h(x) = 1$)

Propriété (Limite infinie par comparaison)

1. Soient f et g deux fonctions définies au moins sur un intervalle du type $]\alpha; +\infty[$.
   Si pour $x > \alpha$ on a $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
   alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
2. Soient f et g deux fonctions définies au moins sur un intervalle du type $]\alpha; +\infty[$.
   Si pour $x > \alpha$ on a $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$
   alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Preuve : Admis. □

Remarque : La propriété reste vraie pour $x \to -\infty$, $x \to a$, $\underset{x > a}{x \to a}$ et $\underset{x < a}{x \to a}$.

Exercice 13

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x + x$.

Exercice 14

1. À l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$
2. En déduire une démonstration de la propriété qui donne la limite de exp en $+\infty$.

Entraînement 11

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + \sin x}{1 - x}$.

Propriété (Théorème des « croissances comparées »)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.

Preuve :