Limites des suites

Spécialité maths

Année 2020-2021

Introduction

L'objet de ce chapitre est d'introduire les notions permettant l'étude du comportement des suites pour les grandes valeurs du rang n.

I Convergence des suites

Définition (Limites de suites)

Soit (u_n) une suite réelle et l un nombre donné.

On dit que (u_n) converge vers l lorsque tout intervalle ouvert I contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$.

Exercice 1

À l'aide de la définition, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Exercice 2

Montrer que la suite $u_n = (-1)^n$ ne converge vers aucun nombre réel.

Définition (Suite divergente)

Une suite qui ne converge vers aucun nombre réel est dite divergente.

Remarque :
C'est le cas de la suite définie par $u_n = (-1)^n$, mais aussi de $v_n = n^2$ et de $w_n = \cos(n)$.

Exercice 3
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ alors, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$.

Mise en garde !

Il ne faut jamais calculer sur une limite dont on ne connait pas l'existence. Examinons ce qui peut en résulter ; pour $u_n = (-1)^n$, en s'appuyant sur $\lim u_n = \lim u_{n+1}$ on obtient $\lim u_n = -\lim u_n$ d'où $\lim u_n = 0$. En conclure que cela montre que (u_n) est convergente vers 0 est une grosse faute : ici (u_n) diverge.[1]

Entraînement 1
Montrer qu'une suite de valeur constante converge vers sa valeur.

Définition (Suites divergentes vers $+\infty$ / $-\infty$)

On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle du type $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On dit qu'une suite (u_n) tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle du type $]-\infty, B[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Remarque :
Une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est divergente.
Dans le cas où la suite est **monotone** on peut obtenir le rang correspondant à l'aide d'un algorithme utilisant une boucle `while` (cf. exercices plus loin).

1. Ceci explique pourquoi est proscrit tout calcul de limites sous la forme $\lim \cdots = \lim \cdots = \ldots$.
De manière générale, en mathématiques, il faut toujours s'assurer de l'existence des objets que l'on manipule.

II Limites usuelles

Propriété

On a les limites usuelles suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty \text{ (pour } p \geq 1\text{)},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \text{ (pour } p \geq 1\text{)}.$$

Preuve : Admis. □

III Limites et opérations algébriques

Propriété (Limite d'une somme)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites admettant une limite (finie ou infinie).

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$						

Preuve : Admis. □

Exercice 4 La suite (u_n) est définie par $u_n = \dfrac{3n^2 - 2}{n}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Entraînement 2

Étudier la convergence de la suite définie par $v_n = \dfrac{-5n^2 + 3}{2n^2}$.

Propriété (Limite d'un produit)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites admettant une limite (finie ou infinie).

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$							

Preuve : Admis. □

Exercice 5 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 - 2n$.

Entraînement 3

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} 5\sqrt{n} - n$.

Entraînement 4

Que dire de la limite d'une suite arithmétique ?

Énoncez une propriété et démontrez-la.

Propriété (Limite d'un quotient)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites admettant une limite (finie ou infinie).

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	$\pm\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0 avec v_n de signe cst	$\pm\infty$	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$							

Preuve : Admis. □

Remarque :

« avec v_n de signe cst » signifie que l'on sait que la suite garde un signe constant strict à partir d'un certain rang. Ne pas écrire 0^+ ou 0^- qui est souvent source de confusion.

Exercice 6 Étudier la convergence de la suite définie par $u_n = \dfrac{3n^3 - 5n^2}{n - 2n^3}$.

Entraînement 5

Étudier la convergence de la suite définie par $v_n = \dfrac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n\sqrt{n}}}$.

IV Limites et ordre des nombres

Définition (Suites minorées, majorées et bornées)

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On dit que (u_n) est minorée lorsqu'il existe un nombre m tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n$, on dit alors que le nombre m est un minorant de (u_n).
2. On dit que (u_n) est majorée lorsqu'il existe un nombre M tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$, on dit alors que le nombre M est un majorant de (u_n).
3. On dit que (u_n) est bornée lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée.

Remarque : La suite de terme général $n(-1)^n$ est un exemple de suite ni majorée, ni minorée et qui n'admet aucune limite.

Exercice 7

Montrer que toute suite convergente est bornée.

Propriété (Passage des inégalités à la limite)

Soient (u_n), (v_n) deux suites convergentes respectivement vers l et l'

Si, à partir d'un certain rang on a , $u_n \leqslant v_n$ alors $l \leqslant l'$.

Remarque : L'inégalité sur les limites est **toujours large**, même si on a une inégalité stricte entre les termes des suites.

Preuve : Admis. (Cf. Annexes du cours pour une preuve.) □

Corollaire (Unicité de la limite)

Si, pour une suite (u_n), on a simultanément $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l'$ alors $l = l'$.

Preuve :

Exercice 8 (Suites majorées convergentes)

Soit (u_n) une suite convergente vers l. On suppose que (u_n) est majorée par M.

Montrer que $l \leqslant M$.

Entraînement 6

Soit (u_n) une suite convergente vers l. On suppose que (u_n) est minorée par m.

Montrer que $m \leqslant l$.

Propriété (Théorème des gendarmes et limites par comparaison)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.

1. Si à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.
2. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
3. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Preuve : Le premier point est admis (preuve en annexe) mais le point 2 est exigible au bac.

Exercice 9 : Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{(-1)^n + 2n}{n}$.

Entraînement 7

Déterminer la limite de $v_n = \dfrac{\sin(n) - n^2}{3n^2}$.

Propriété (Inégalité de Bernoulli)

Pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

Preuve (exigible au bac) :

Propriété (Limite de la suite (q^n))

Soit q un réel quelconque

— Si $q \leqslant -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

— Si $q \in]-1;1[$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

— Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.

— Si $1 < q$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Preuve (exigible au bac) :

Exercice 10

Déterminer les limites des suites : $u_n = \dfrac{3^n + 5}{3 - 2^n}$, $\quad v_n = \dfrac{3^{n+1}}{3^n - 2^n}$ et $w_n = 2^n + \cos(2n)$

Entraînement 8

Déterminer les limites des suites :

$$u_n = \frac{2^n - 4}{3 + 5^{n+1}}, \qquad v_n = \frac{3^n}{3^{n-1} + \left(\sqrt{2}\,\right)^n} \quad \text{et} \quad w_n = \sin(n+3) - \sqrt{n}$$

Exercice 11

On considère la suite (u_n) géométrique de raison $q = 0,1$ et de premier terme $u_1 = 0,9$.

1. Calculer les premiers termes de u_n.
2. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Calculer les premiers termes de la suite (S_n).
3. Déterminer la limite de la suite (S_n).
4. Que dire du nombre $x = 0,99999....$ écrit avec une infinité de 9 ?

Exercice 12 : Algorithme de détermination de seuil

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et de raison $q = \dfrac{4}{3}$.

1. Justifier que (u_n) est croissante.
2. Déterminer la limite de (u_n).
3. Écrire un algorithme permettant de déterminer le plus petit rang N à partir duquel $u_n > A$.

Entraînement 9

On définie la suite (v_n) par $v_n = \dfrac{2^n}{5 + 2^{n+1}}$

1. Déterminer la limite ℓ de (v_n).
2. Justifier que (v_n) est croissante.
3. Écrire une fonction `seuil(e)` qui prend un flottant strictement positif e en paramètre et renvoie le plus petit n tel que $\mid v_n - \ell \mid < e$.

V Suites monotones

Définition (Suites monotones)

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que (u_n) est monotone lorsqu'elle est croissante ou lorsqu'elle est décroissante.

Propriété (Suites monotones convergentes)

1. Si une suite (u_n) est croissante et converge vers un nombre l alors pour tout n on a $u_n \leqslant l$.
2. Si une suite (v_n) est décroissante et converge vers un nombre l alors pour tout n on a $l \leqslant v_n$.

Preuve :

Théorème de convergence monotone des suites

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. Si (u_n) est majorée et croissante alors elle est convergente.
2. Si (u_n) est minorée et décroissante alors elle est convergente.
3. Si (u_n) est croissante et n'est pas majorée alors elle diverge vers $+\infty$.
4. Si (u_n) est décroissante et n'est pas minorée alors elle diverge vers $-\infty$.

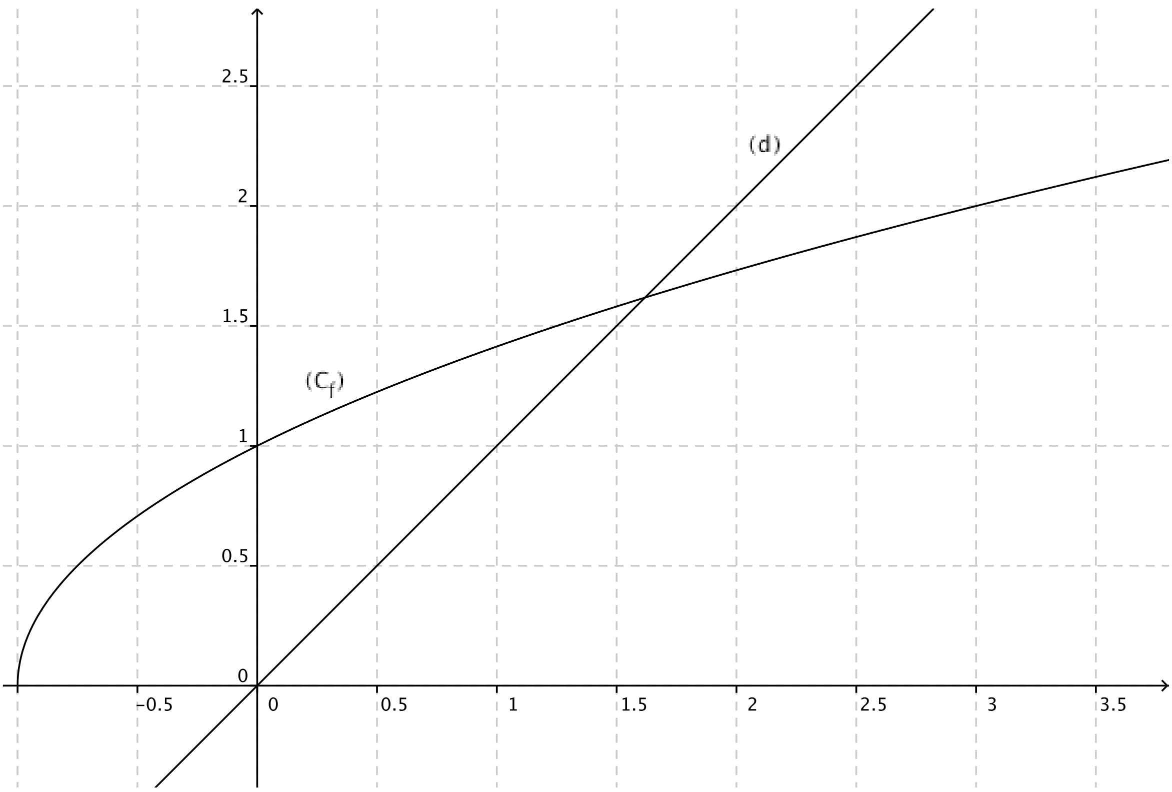
Preuve : La preuve des deux premiers points est hors programme, ils sont donc admis [2]. Attention, le point 3 est exigible au bac.

2. En définissant les nombres réels par leurs développements décimaux illimités, la preuve est tout à fait accessible à un élève de terminale.

Exercice 13

On considère la suite (x_n) définie par $\begin{cases} x_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ x_{n+1} & = & \sqrt{x_n + 1} \end{cases}$

1. Représenter les premiers termes de la suite à l'aide de la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$ et de la première bissectrice du repère.
2. Montrer que (x_n) est majorée par 2.
3. Montrer que la suite (x_n) est croissante.
4. Montrer que la suite (x_n) est convergente.
5. Justifier que sa limite l est solution de $l^2 = 1 + l$. En déduire la valeur de l.



Annexes

Preuve du **théorème de passage des inégalités à la limite.**

On rappelle l'énoncé :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réelles telles que :

$$\begin{array}{l} * \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell' \\ * \text{ Il existe un rang } N_0 \text{ tel que pour } n \geqslant N_0,\ u_n \leqslant v_n \end{array}$$

$$\text{alors } \ell \leqslant \ell'$$

Preuve :

On procède par l'absurde en supposant que $\ell' < \ell$.

La moyenne de deux nombres est toujours compris entre ces deux nombres, on a donc la double inégalité stricte : $\ell' < \dfrac{\ell' + \ell}{2} < \ell$.

En ajoutant encore deux termes, Il vient alors : $\ell' - 1 < \ell' < \dfrac{\ell' + \ell}{2} < \ell < \ell + 1$.

On en déduit que les intervalles ouverts $I' =]\ell' - 1, \dfrac{\ell' + \ell}{2}[$ et $I =]\dfrac{\ell' + \ell}{2}, \ell + 1[$ contiennent respectivement ℓ' et ℓ.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ ainsi, d'après la définition de la limite d'une suite, on en déduit qu'il existe un rang N' tel que pour $n \geqslant N'$, $v_n \in I'$ et comme on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ on obtient de la même façon, qu'il existe un rang N tel que pour $n \geqslant N$, $u_n \in I$.

Pour $n \geqslant \max(N, N', N_0)$, on a :

$v_n \in I'$ et $u_n \in I$ donc $v_n < \dfrac{\ell' + \ell}{2}$ et $\dfrac{\ell' + \ell}{2} < u_n$ ainsi $v_n < u_n$ et simultanément $u_n \leqslant v_n$.

Ceci n'est pas possible, l'hypothèse prise est donc fausse ainsi $\boxed{\ell \leqslant \ell'}$

Preuve du **théorème des gendarmes.**

On rappelle l'énoncé :

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.

Si à partir d'un certain rang N, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Preuve :

On utilise la définition de la limite d'une suite : soit $I =]\alpha, \beta[$ un intervalle ouvert qui contient ℓ.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ainsi il existe un rang N_0 tel que : pour $n \geqslant N_0$, $u_n \in I$ donc en particulier $\alpha < u_n$.

De même, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ ainsi il existe un rang N_1 tel que : pour $n \geqslant N_1$, $w_n \in I$ donc en particulier $w_n < \beta$.

Pour $n \geqslant N' = \max(N, N_0, N_1)$ on a simultanément les inégalités : $\alpha < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < \beta$ ainsi, pour $n \geqslant N'$, $v_n \in I$. Ceci prouve que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell}$