Récurrence et suites

Spécialité maths

Année 2020-2021

Introduction

Dans ce chapitre, on introduit le raisonnement par récurrence qui sera utilisé tout le reste de l'année. On en profite pour revoir les résultats de première sur les suites.

I Axiome de récurrence

L'ensemble des entiers naturels possède la propriété remarquable de pouvoir être entièrement parcouru à partir d'un point de départ par une suite d'étapes successives : on part de 0 et on avance d'une unité à chaque étape. Cette simple remarque est à la base de la méthode de démonstration par récurrence.

Axiome de récurrence [1]

On considère une propriété $\mathcal{P}_n$ a priori susceptible d'être vraie ou fausse pour chaque entier n supérieur ou égale à un entier fixé n_0.

Si :

— (Initialisation) $\mathcal{P}_{n_0}$ est vrai,

— (Hérédité) pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}_n$ est vraie implique $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie,

alors pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Remarque :

Pour se convaincre de la validité de la récurrence détaillons son fonctionnement pour $n_0 = 0$:

D'après l'initialisation, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

L'hérédité, pour $n = 0$, indique que si $\mathcal{P}_0$ est vraie alors $\mathcal{P}_1$ est vraie, or $\mathcal{P}_0$ est vraie donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

L'hérédité, pour $n = 1$, indique que si $\mathcal{P}_1$ est vraie alors $\mathcal{P}_2$ est vraie, or $\mathcal{P}_1$ est vraie donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.

L'hérédité, pour $n = 2$, indique que si $\mathcal{P}_2$ est vraie alors $\mathcal{P}_3$ est vraie, or $\mathcal{P}_2$ est vraie donc $\mathcal{P}_3$ est vraie.

... et en poursuivant on atteint tous les entiers.

Exercice 1

Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$. Montrer que $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. Dans une théorie mathématique, un axiome est une propriété admise comme point de départ. Le cinquième axiome de la définition axiomatique de l'ensemble des entiers naturels posée par Giuseppe Peano (Spinetta di Cuneo (Coni), 27 août 1858 - Turin, 20 avril 1932) est celui de la récurrence.

Exercice 2

La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_1 & = & \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{n+1}{3n}u_n \end{cases}$ Montrer que $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.

Entraînement 1

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & u_n + 2n + 1 \end{cases}$

1. Vérifier que $u_1 = 1$, $u_2 = 4$ et $u_3 = 9$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = n^2$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3$.

Exercice 4 : Digression

Calculer les premiers termes de la suite définie par : $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & -\dfrac{5}{3} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{2}{u_n+1}+1 \end{array} \right.$

Exercice 5

Étudier la monotonie de la suite (u_n) définie par $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 5 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{u_n+2} \end{array} \right.$

Entraînement 2

Étudier la monotonie de la suite (u_n) définie par $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & 3-\dfrac{1}{2+u_n} \end{array} \right.$

Remarque : On admet que cette suite est bien définie et a ses termes tous strictement positifs.

II Quelques rappels

II.1 Comportement global

Définition (Variations des suites)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que :

* (u_n) est croissante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
* (u_n) est décroissante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
* (u_n) est monotone lorsqu'elle est croissante ou lorsqu'elle est décroissante.

Exercice 6

Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^2+1}$ est croissante.

Définition (Suites minorées, majorées et bornées)

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On dit que (u_n) est minorée lorsqu'il existe un nombre m tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n$, on dit alors que le nombre m est un minorant de (u_n).
2. On dit que (u_n) est majorée lorsqu'il existe un nombre M tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$, on dit alors que le nombre M est un majorant de (u_n).
3. On dit que (u_n) est bornée lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée.

Exercice 7

Montrer que la suite de terme général $v_n = n(-1)^n$ n'est ni majorée ni minorée.

II.2 Suites arithmétiques

Définition (Suites arithmétiques)

On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'il existe un nombre r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Le nombre r est alors appelé raison de la suite.

Remarque : Une suite arithmétique dont la raison est strictement négative est décroissante, si la raison est nulle la suite est constante et si elle est strictement positive, elle est croissante.

Exercice 8 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = n^2$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est arithmétique est déterminer sa raison.

Entraînement 3

On considère une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r.

Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 3u_n$ est arithmétique et déterminer sa raison (en fonction de r).

Propriété (Terme général des suites arithmétiques)

1. Si une suite (u_n) admet une expression de son terme général du type $u_n = an + b$ où a et b sont deux réels fixés, alors (u_n) est arithmétique de raison a.
2. Si (u_n) est arithmétique de raison r alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_p + (n-p)r$. En particulier, (pour $p = 0$) on a : $u_n = u_0 + nr$.

Preuve : Vue en première.

Exercice 9

On considère[2] la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n}{2u_n+1} \end{cases}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et préciser sa raison.
3. En déduire l'expression du terme générale de (u_n).

2. On admet que cette suite est bien définie et a ses termes tous strictement positifs.

Entraînement 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{{u_n}^2+3} \end{cases}$

On admet que cette suite est bien définie et a ses termes tous strictement positifs.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. On pose $v_n = {u_n}^2$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et préciser sa raison.
3. En déduire l'expression du terme générale de (u_n).

Propriété (Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
La somme $S = u_k + u_{k+1} + \cdots + u_p$ de termes consécutifs de la suite se calcule par

$$S = \frac{u_k + u_p}{2}(p-k+1)$$

C'est à dire : $S =$ Moyenne du premier et du dernier terme $\times$ Nombre de termes

Preuve : Vue en première.

Exercice 10

Calculer les sommes :

(a) $S_1 = 3 + 7 + 11 + 15 + \cdots + 407.$

(b) $S_2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1.$

Entraînement 5

Calculer les sommes :

(a) $S_1 = 1 + \dfrac{4}{3} + \dfrac{5}{3} + \cdots + 5.$

(b) $S_2 = n + (n+2) + (n+4) + \cdots + 3n.$

II.3 Suites géométriques

Définition (Suites géométriques)

On dit qu'une suite (u_n) est géométrique lorsqu'il existe un nombre non nul q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q\,u_n.$$

Le nombre q est alors appelé raison de la suite.

Exercice 11

On considère une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q.

Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = {u_n}^2$ est géométrique et déterminer sa raison (en fonction de q).

Propriété (Terme général des suites géométriques)

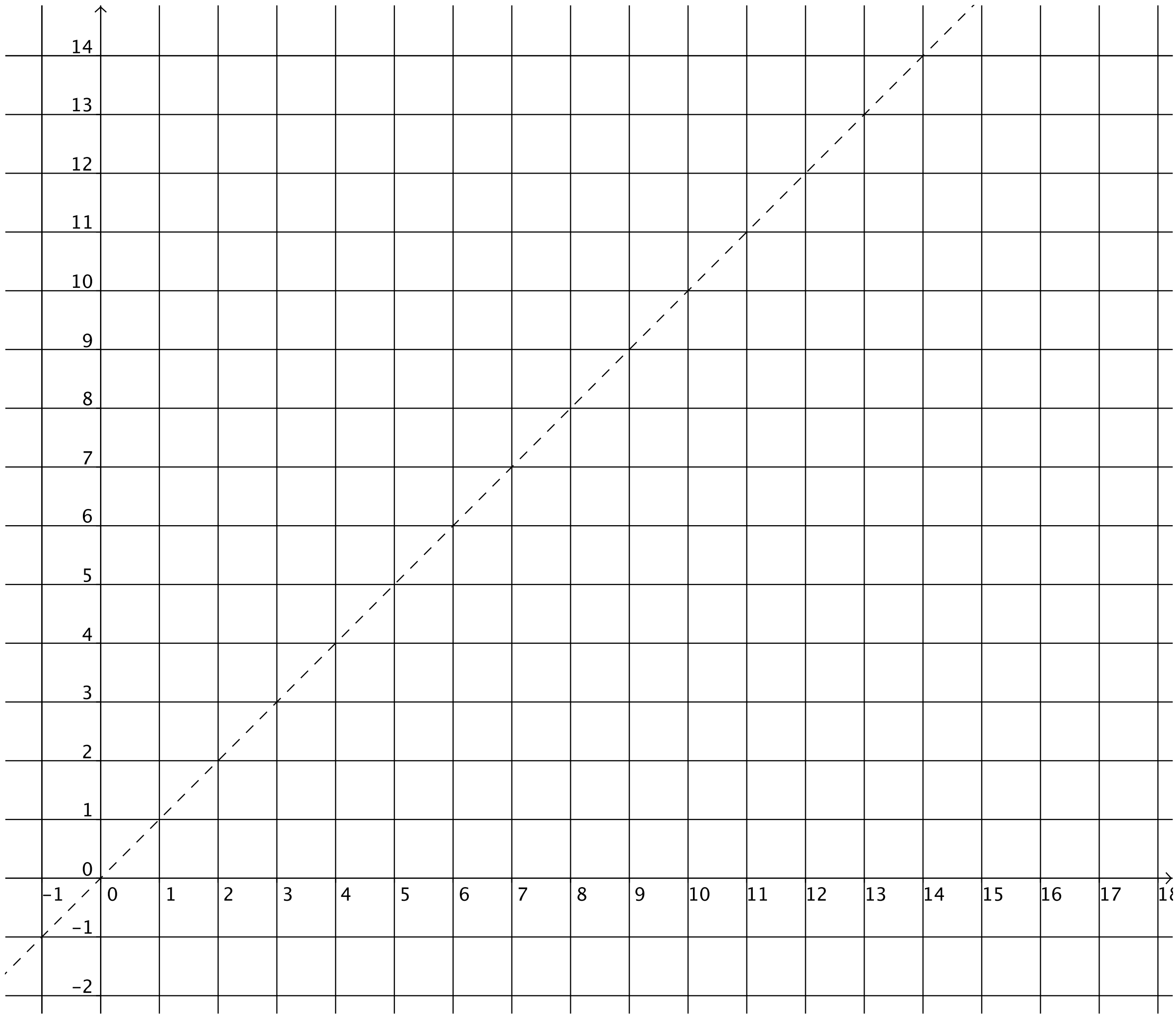
Si une suite (u_n) admet une expression de son terme général du type $u_n = a^n \times b$ où $a \neq 0$ et b sont deux réels fixés, alors (u_n) est géométrique de raison a.

Si (u_n) est géométrique de raison q alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
En particulier, (pour $p = 0$), on a $u_n = u_0 q^n$.

Preuve : Vue en première.

Exercice 12 On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & 2u_n + 1 \end{cases}$

1. Calculer les premiers termes de la suite.
2. Représenter les premiers termes de la suite sur le graphe ci-dessous.
3. Déterminer la valeur d'un nombre a tel que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + a$ soit une suite géométrique.
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.



Propriété (Variation d'une suite géométrique)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul.

— Si $q < 0$ alors (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

— Si $q \in]0;1[$ alors

  — si le premier terme est positif, (u_n) est décroissante,

  — si le premier terme est négatif, (u_n) est croissante.

— Si $q = 1$ alors (u_n) est constante.

— Si $1 < q$ alors

  — si le premier terme est positif, (u_n) est croissante,

  — si le premier terme est négatif, (u_n) est décroissante.

Preuve :

Propriété (Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
La somme $S = u_k + u_{k+1} + \cdots + u_p$ de termes consécutifs de la suite se calcule par :

— Si $q = 1$ alors $S = (p - k + 1)u_k$.

— Si $q \neq 1$ alors $S = u_k \dfrac{1 - q^{p-k+1}}{1 - q}$.

C'est à dire : $S = \text{Premier terme} \times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{Nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$.

Preuve : Vue en première.

Exercice 13

Calculer les sommes :

(a) $S_1 = 3 + 6 + 12 + 24 + \cdots + 3 \times 1024$.

(b) $S_2 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$.

Entraînement 6

Calculer les sommes :

(a) $S_1 = 7 + 0,7 + 0,07 + \cdots + 0,\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ zéros}}7$.

(b) $S_2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{2^n}$.