

TD3 - Arithmétique 1

Exercice 1

Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n + 1 \mid n^2 + 5n + 1$

Exercice 2 *

Soient a et b deux entiers relatifs tels que $0 < a < b$ avec $a \mid b$ et $b - a \mid b$.

Montrer que $b = 2a$.

Exercice 3

Soit n un entier relatif.

Montrer que si un entier relatif a divise $n^2 + 3n + 13$ et $n + 2$, alors a divise 11.

Exercice 4

1. Simplifier

$$(x - y)(x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n)$$

(On pourra utiliser le symbole \sum)

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{Z}$, $a^n - b^n$ est divisible par $a - b$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ impair et $a, b \in \mathbb{Z}$, $a^n + b^n$ est divisible par $a + b$.

Exercice 5

Soit n un entier naturel non nul, et d un diviseur positif de n .

Montrer que, pour tout entier $a \geq 1$, $a^n - 1$ est divisible par $a^d - 1$.

Indication : On pourra déduire une formule de factorisation de $x^k - y^k$ d'un résultat obtenu précédemment.

Exercice 6

Déterminer les ensembles suivants :

1. $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(36)$
2. $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}(48)$
3. $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(125)$

Exercice 7 **

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 \mid (n+1)^n - 1$

Exercice 8

Résoudre dans \mathbb{N} les équations diophantiennes suivantes

1. $x^2 - 4y^2 = 75$

2. $25x^2 - 4y^2 = 36$

3. $5x^2 + y^2 = 45$

4. $6x + y - 3xy + 22 = 0$

Exercice 9 **

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n \mid 2^{(3^n)} + 1$

Exercice 10

Déterminer le reste de la division de 2021^{2021} par 7.