Remarque sur les exposants en arithmétique :

L'utilisation d'expression comme a^n avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ ne pose pas de problème en arithmétique car elle désigne toujours un entier. Cependant, si $n \in \mathbb{Z}$ ce n'est plus la même chose car $a^{-1} = \frac{1}{a}$ qui n'est pas un entier. On devra donc se méfier d'expression du type n^{k-2} ou 3^{2n-1} qui ne sont *a priori* pas entière.

Exercice : rechercher où interviennent n^{k-2} et 3^{2n-1} dans le corrigé et pourquoi dans le contexte correspondant ce sont bien des entiers.

Exercice 1

Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ telles que $n+1 \mid n^2+5n+1$

Solution :

On procède par analyse-synthèse.

Analyse : Soit un éventuel $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n+1 \mid n^2+5n+1$. On a toujours $n+1 \mid (n+1)(n+4)$ c'est à dire $n+1 \mid n^2+5n+4$. Par différence, on en déduit que $n+1 \mid 3$ ainsi $n+1 \in \{-3,-1,1,3\}$ puis $n \in \{-4,-2,0,2\}$

Synthèse :

On vérifie par calcul que chacun des 4 nombres obtenus est solution.

Pour $n=-4$, $\quad n+1=-3 \quad$ et $\quad n^2+5n+1=-3$

Pour $n=-2$, $\quad n+1=-1 \quad$ et $\quad n^2+5n+1=-5$

Pour $n=0$, $\quad n+1=1 \quad$ et $\quad n^2+5n+1=1$

Pour $n=2$, $\quad n+1=3 \quad$ et $\quad n^2+5n+1=15$

Exercice 2 *

Soient a et b deux entiers relatifs tels que $0<a<b$ avec $a \mid b$ et $b-a \mid b$.

Montrer que $b=2a$.

Solution :

On sait que $a \mid b$ donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $ak=b$ et comme ici $a<b$, on a $k \geqslant 2$.

On dispose aussi de $b-a \mid b$ ainsi il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $(b-a)k'=b$.

On en déduit alors : $ak=(b-a)k'$ puis, en divisant par a, on obtient $k=\left(\dfrac{b}{a}-1\right)k'$.

Ensuite, en remplaçant $\frac{b}{a}$ par k il vient :

$$k=(k-1)k'$$

On divise par $k-1 \geqslant 1$: $\dfrac{k}{k-1}=k'$. Or $\dfrac{k}{k-1}=\dfrac{k-1+1}{k-1}=1+\dfrac{1}{k-1}$, on a donc : $1+\dfrac{1}{k-1}=k'$ puis :

$$k'-1=\frac{1}{k-1}$$

Le seul inverse d'un nombre entier qui est aussi un nombre entier est 1 d'où il vient $k-1=1$ puis $k=2$ ainsi

$$\boxed{b=2a}$$

Exercice 3

Soit n un entier relatif.

Montrer que si un entier relatif a divise $n^2+3n+13$ et $n+2$, alors a divise 11.

Solution :

On suppose que $a \mid n^2+3n+13$ et $a \mid n+2$.

On a donc $a \mid (n+2)(n+1)$ c'est à dire $a \mid n^2+3n+2$.

Par différence, il vient alors : $\boxed{a \mid 11}$

Exercice 4

1. Simplifier
$$(x-y)(x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n)$$

   (On pourra utiliser le symbole $\sum$)
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - b^n$ est divisible par $a-b$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ impair, $a^n + b^n$ est divisible par $a+b$.

Solution :

1. Il s'agit de simplifier $(x-y)\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}y^k$. On utilise les propriétés du symbole sigma qui ont été vues dans le cours :
$$(x-y)\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}y^k = x\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}y^k - y\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}y^k = \sum_{k=0}^{n} x^{n+1-k}y^k - \sum_{k=0}^{n} x^{n-k}y^{k+1}$$
On fait le changement d'indice $\ell = k+1 \Leftrightarrow k = \ell - 1$ sur la seconde somme :
$$(x-y)\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}y^k = \sum_{k=0}^{n} x^{n+1-k}y^k - \sum_{\ell=1}^{n+1} x^{n+1-\ell}y^\ell$$
On revient ensuite à l'indice k pour finir le calcul :
$$(x-y)\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}y^k = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x^{n+1-k}y^k - \left(\sum_{k=1}^{n} x^{n+1-k}y^k\right) - y^{n+1}$$
$$\boxed{(x-y)\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}y^k = x^{n+1} - y^{n+1}}$$
2. On utilise le résultat de la question précédente en remplaçant n par $n-1$, x par a et y par b :
$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = a^n - b^n$$
Ici a et b sont des entiers donc $\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \in \mathbb{Z}$ ainsi $\boxed{a-b \mid a^n - b^n}$
3. On utilise le résultat de la question précédente en remplaçant b par $-b$: $a-(-b) \mid a^n - (-b)^n$.
Ici n est impair donc $(-b)^n = -b^n$. On obtient donc : $\boxed{a+b \mid a^n + b^n}$

Exercice 5

Soit n un entier naturel non nul, et d un diviseur positif de n.

Montrer que, pour tout entier $a \geq 1$, $a^n - 1$ est divisible par $a^d - 1$.

Indication : On pourra déduire une formule de factorisation de $x^k - y^k$ d'un résultat obtenu précédemment.

Solution :

On suppose que $d \mid n$ ainsi il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $dk = n$, on a donc $a^n - 1 = a^{dk} - 1 = (a^d)^k - 1^k$
On applique le résultat de la question 1. de l'exercice précédent avec $x = a^d$, $y = 1$ et $n = k-1$:
$$(a^d - 1)\sum_{j=0}^{k-1}(a^d)^{k-1-j}y^j = (a^d)^k - 1^k = a^n - 1$$

Exercice 6

Déterminer les ensembles suivants :

1. $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(36)$

2. $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}(48)$
3. $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(125)$

Solution :

On applique l'algorithme vu en classe et on obtient :

1. $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(36) = \{1, 36, 2, 18, 3, 12, 4, 9, 6\}$
2. $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}(48) = \{-1, -48, -2, -24, -3, -16, -4, -12, -6, -8, 1, 48, 2, 24, 3, 16, 4, 12, 6, 8\}$
3. $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(125) = \{-1, -125, -5, -25, 1, 125, 5, 25\}$

Exercice 7 **

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad n^2 \mid (n+1)^n - 1$

Solution :

On utilise la formule du binôme de Newton :

$$(n+1)^n - 1 = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k 1^{n-k}\right) - 1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} n^k = \binom{n}{1} n^1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} n^k$$

On sait que $\binom{n}{1} = n$ d'où : $(n+1)^n - 1 = n \times n + \sum_{k=2}^{n} n^2 \times \binom{n}{k} n^{k-2} = n^2 \times \underbrace{\left(1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} n^{k-2}\right)}_{\in \mathbb{N}}$

Ceci prouve que : $\boxed{n^2 \mid (n+1)^n - 1}$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations diophantiennes suivantes

1. $x^2 - 4y^2 = 75$
2. $25x^2 - 4y^2 = 36$
3. $5x^2 + y^2 = 45$
4. $6x + y - 3xy + 22 = 0$

Solution :

1. On procède par analyse-synthèse.

   Analyse : On considère un éventuel couple (x, y) solution de l'équation, on a donc $x^2 - 4y^2 = 75$ avec $x, y \in \mathbb{N}$.
   En factorisant, il vient $(x+2y)(x-2y) = 75$. On en déduit que $x + 2y$ et $x - 2y$ sont des diviseurs associés de 75. De plus $x + 2y \geqslant 0$, ce sont donc des diviseurs positifs et $x + 2y \geqslant x - 2y$ ainsi $x + 2y$ est le plus grand des deux diviseurs associés.
   L'ensemble des diviseurs positifs de 75 est : $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(75) = \{1, 75, 3, 25, 5, 15\}$, d'où il vient :

$$\begin{cases} x+2y &= 75 \\ x-2y &= 1 \end{cases} \quad \textbf{ou} \quad \begin{cases} x+2y &= 25 \\ x-2y &= 3 \end{cases} \quad \textbf{ou} \quad \begin{cases} x+2y &= 15 \\ x-2y &= 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= 38 \\ y &= 37/2 \end{cases} \quad \textbf{ou} \quad \begin{cases} x &= 14 \\ y &= 11/2 \end{cases} \quad \textbf{ou} \quad \begin{cases} x &= 10 \\ y &= 5/2 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$$

   Remarque : ici on ne fait pas de synthèse puisqu'il n'y a pas de solution.

2. On procède par analyse-synthèse.

   Analyse : On considère un éventuel couple (x, y) solution de l'équation, on a donc $25x^2 - 4y^2 = 36$ avec $x, y \in \mathbb{N}$.
   En factorisant, il vient $(5x+2y)(5x-2y) = 75$. On en déduit que $5x + 2y$ et $5x - 2y$ sont des diviseurs associés de 36. De plus $5x + 2y \geqslant 0$, ce sont donc des diviseurs positifs et $5x + 2y \geqslant 5x - 2y$ ainsi $5x + 2y$ est le plus grand des deux diviseurs associés.
   L'ensemble des diviseurs positifs de 36 est : $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(36) = \{1, 36, 2, 18, 3, 12, 4, 9, 6\}$. Par ailleurs $(5x+2y)+(5x-2y) = 10x$ ainsi la somme des deux diviseurs associés doit être divisible par 10 ce qui élimine les couples $(36, 1)$, $(12, 3)$, $(9, 4)$ et $(6, 6)$. Il ne reste plus qu'une possibilité :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x+2y & = & 18 \\ 5x-2y & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 5x+2y & = & 18 \\ -4y & = & -16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 5x+8 & = & 18 \\ y & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 4 \end{array}\right.$$

Synthèse :
Pour $(x, y) = (2, 4)$, on a $25x^2 - 4y^2 = 25 \times 4 - 4 \times 16 = 100 - 64 = 36$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(2, 4)\}}$$

3. On procède par analyse-synthèse.
   Analyse : On considère un éventuel couple (x, y) solution de l'équation, on a donc $5x^2 + y^2 = 45$ avec $x, y \in \mathbb{N}$.
   Un carré est toujours positif : $y^2 \geqslant 0$ donc $5x^2 \leqslant 45$ puis $x^2 \leqslant 9$. On en déduit que $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.
   $x = 0$ donne $y^2 = 45$ ce qui est impossible car 45 n'est pas un carré parfait.
   $x = 1$ donne $y^2 = 40$ ce qui est impossible car 40 n'est pas un carré parfait.
   $x = 2$ donne $y^2 = 25$ donc $y = 5$.
   $x = 3$ donne $y^2 = 0$ donc $y = 0$.

   Synthèse :
   Pour $(x, y) = (2, 5)$, on a $5x^2 + y^2 = 5 \times 4 + 5^2 = 20 + 25 = 45$.
   Pour $(x, y) = (3, 0)$, on a $5x^2 + y^2 = 5 \times 9 + 0^2 = 45 + 0 = 45$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(2, 5), (3, 0)\}}$$

   Remarque : Il ne s'agissait pas, ici, d'une équation « factorisable » car il n'est pas possible de factoriser $5x^2 + y^2$.
4. On procède par analyse-synthèse.
   Analyse : On considère un éventuel couple (x, y) solution de l'équation, on a donc $6x + y - 3xy + 22 = 0$ avec $x, y \in \mathbb{N}$.
   On en déduit que $3xy - 6x - y = 22$. Or on a toujours : $(3x - 1)(y - 2) = 3xy - 6x - y + 2$. Ainsi $(3x - 1)(y - 2) - 2 = 22$ puis $(3x - 1)(y - 2) = 24$.
   On a prouvé que $3x - 1$ est un diviseur de 24 or $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}(24) = \{-1, -24, -2, -12, -3, -8, -4, -6, 1, 24, 2, 12, 3, 8, 4, 6\}$.
   En remarquant que $3x - 1 \geqslant -1$, on obtient $3x - 1 \in \{-1, 1, 24, 2, 12, 3, 8, 4, 6\}$
   Il vient alors $3x \in \{0, 2, 25, 3, 13, 4, 9, 5, 7\}$. On élimine les nombres qui ne sont pas multiples de 3, il reste : $3x \in \{0, 3, 9\}$ ce qui donne : $x \in \{0, 1, 3\}$
   En reportant dans la relation $(3x - 1)(y - 2) = 24$, on obtient :
   Si $x = 0$ alors $y = -22$ ce qui est impossible car $-22 \notin \mathbb{N}$.
   Si $x = 1$ alors $y = 14$.
   Si $x = 3$ alors $y = 5$.

   Synthèse :
   Pour $(x, y) = (1, 14)$, on a $6x + y - 3xy + 22 = 6 + 14 - 3 \times 14 + 22 = 0$.
   Pour $(x, y) = (3, 5)$, on a $6x + y - 3xy + 22 = 6 \times 3 + 5 - 3 \times 3 \times 5 + 22 = 18 + 5 - 45 + 22 = 0$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(1, 14), (3, 5)\}}$$

   Remarque : Pour trouver la factorisation qui débloque tout, il faut tâtonner. Avec un peu de méthode on écrit une forme $(3x + \alpha)(y + \beta)$ *et on essaye d'ajuster les valeurs de* α *et* β.

Exercice 9 **

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 3^n \mid 2^{(3^n)} + 1$

Solution :

On remarque que la propriété est vraie pour $n = 0$.
Montrons, par récurrence sur n que la propriété $\mathcal{P}_n : 3^n \mid 2^{(3^n)} + 1$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation : Pour $n = 1$ on a $3^n = 3^1 = 3$ et $2^{(3^n)} + 1 = 2^3 + 1 = 9 = 3 \times 3$.
La propriété est donc vraie pour $n = 1$.
Hérédité : On suppose que pour un $n \geqslant 1$ fixé, on a : $3^n \mid 2^{(3^n)} + 1$ ainsi il existe un nombre $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$3^n \times k = 2^{(3^n)} + 1$$

On a alors $2^{(3^{n+1})} + 1 = 2^{(3^n \times 3)} + 1 = \left(2^{(3^n)}\right)^3 + 1$. Or, on a aussi : $2^{(3^n)} = 3^n \times k - 1$, il vient donc :

$$2^{(3^{n+1})} + 1 = (3^n \times k - 1)^3 + 1$$

On utilise la formule $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ qui se déduit de la formule du binôme dans le cas $n = 3$:

$$2^{(3^{n+1})} + 1 = (k3^n)^3 - 3(k3^n)^2 + 3(k3^n) - 1 + 1 = k^3 \times 3^{3n} - k \times 3^{2n+1} + k \times 3^{n+1}$$
$$2^{(3^{n+1})} + 1 = 3^{n+1} \underbrace{(k^3 \times 3^{2n-1} - k \times 3^n + k)}_{\in \mathbb{Z} \quad \text{car } 2n-1 \geqslant 0} \text{ ainsi } 3^{n+1} \mid 2^{(3^{n+1})} + 1.$$

Ceci prouve l'hérédité et achève la récurrence, on a établi que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n \mid 2^{(3^n)} + 1$.

Exercice 10

Déterminer le reste de la division de 2021^{2021} par 7.

Solution :

En posant la division euclidienne de 2021 par 7, on obtient un reste de 5 ainsi $2021 \equiv 5 \quad [7]$ puis $2021^{2021} \equiv 5^{2021} \quad [7]$.
On dresse un tableau qui donne les restes des divisions de 5^n par 7 pour les premières valeurs de n :

n	0	1	2	3	4	5	6
reste de 5^n par 7	1	5	4	6	2	3	1

On remarque que $5^6 \equiv 1 \quad [7]$ ce qui nous amène à poser la division de 2021 par 6 : $2021 = 6 \times 336 + 5$.
On utilise ensuite cette égalité : $(5^6)^{336} \equiv 1^{336} \quad [7]$, c'est à dire : $5^{6\times 336} \equiv 1 \quad [7]$
En multipliant par 5^5, il vient alors $5^{6\times 336} \times 5^5 \equiv 5^5 \quad [7]$, c'est à dire : $5^{2021} \equiv 5^5 \equiv 3 \quad [7]$

$$\boxed{\text{Le reste de } 2021^{2021} \text{ par 7 est 3}}$$