Exercice 1

1. On obtient :

$$z_1 = 2+5i, \quad z_2 = -8, \quad z_3 = \frac{15-6i}{29}, \quad z_4 = \frac{1+3i}{4}, \quad z_5 = 2+i\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad z_6 = -2-2i$$

On retiendra que pour appliquer la formule $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ au calcul de z_6, on a du procéder à la transformation : $(1-i)^3 = (1+(-i))^3$ ce qui a permis d'utiliser la formule avec $a=1$ et $b=-i$.

2. On obtient : a) $z = \dfrac{-1-2i}{5}$ b) $z = \dfrac{-1+3i}{4}$.

3. **On rappelle qu'un système linéaire se résout par équivalences successives et qu'on ne doit donc jamais dissocier un tel système. Par ailleurs la méthode de résolution par substitution est à éviter, on lui préfère la méthode par combinaison.**

a) $$\begin{cases} z - iz' = 1 \\ iz + 2z' = 1-i \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - iL_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} z - iz' = 1 \\ z' = 1-2i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1+i(1-2i) \\ z' = 1-2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = 3+i \\ z = 1-2i \end{cases}$$

---

b) $$\begin{cases} (2-i)z + z' = 2i \\ (1-i)z - 2z' = -i \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (2-i)z + z' = 2i \\ (5-3i)z = 3i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2-i)z + z' = 2i \\ z = \frac{3i}{5-3i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = 2i-(2-i)\frac{-9+15i}{34} \\ z = \frac{-9+15i}{34} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{-9+15i}{34} \\ z' = \frac{3+29i}{34} \end{cases}$$

Exercice 2

1. Pour $z = x+iy$ avec $(x,y) \neq (0,-1)$, on obtient :

$$f(z) = \frac{x^2-x+y^2+3y+2}{x^2+(y+1)^2} + i\,\frac{x+y+1}{x^2+(y+1)^2}$$

2. Pout $z \neq -i$, on a alors $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x+y+1=0 \Leftrightarrow y=-x-1$

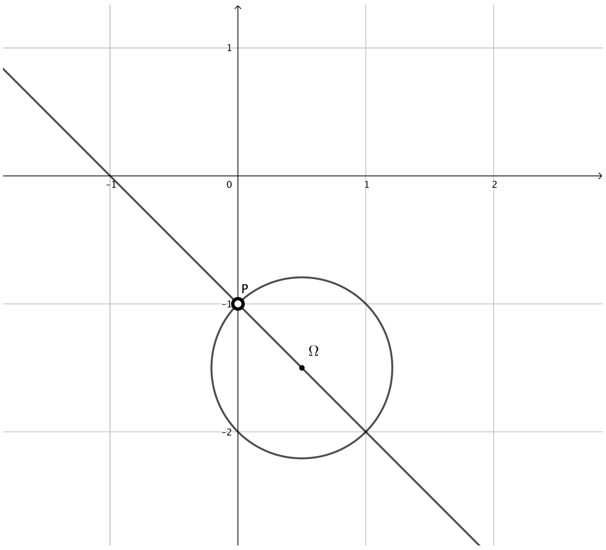
L'ensemble des points M(z) tels que $f(z)$ soit un réel est :

$$\boxed{\text{la droite d'équation } y=-x-1 \text{ privée du point } P(-i)}$$

On a aussi : $f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2-x+y^2+3y+2=0 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+(y+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+2=0 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{1}{2}$

L'ensemble des points M(z) tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur est :

$$\boxed{\text{le cercle de centre } \Omega\left(\frac{1}{2},\frac{-3}{2}\right) \text{ et de rayon } r=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ privé du point } P(-i)}$$



Exercice 3

On obtient :

$\overline{Z_1} = (1 - i\overline{z})(1 - 2\overline{z}) - 2i$ $\qquad \overline{Z_2} = -i\overline{z}^2 + (2+i)\overline{z} + 3$ $\qquad \overline{Z_3} = \dfrac{1 - i\overline{z}}{\overline{z} + 2i}$

Exercice 4

1. On pose $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, on a alors :

$iz + 2\overline{z} = 2 - i \Leftrightarrow i(x+iy) + 2(x - iy) = 2 - i \Leftrightarrow ix - y + 2x - 2iy = 2 - i \Leftrightarrow 2x - y + i(x - 2y) = 2 - i$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 2 \\ x & - & 2y & = & -1 \end{array} \right. \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rrcr} x & -2y & = & 3 \\ & -3y & = & 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{3} \\ y & = & -\frac{5}{3} \end{array} \right.$$

L'équation admet une unique solution : $\boxed{z = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{5i}{3}}$

2. $\bar{z}^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow z^2 - (i\sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow (z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \boxed{z = i\sqrt{3} \ \textbf{ou} \ z = -i\sqrt{3}}$

3. Pour $z \neq -2i$, on a :

$$\frac{z+i}{iz-2} = 2 - i \Leftrightarrow z + i = (2-i)(iz-2) \Leftrightarrow z + i = 2iz - 4 + z + 2i$$

$$\Leftrightarrow 2iz = 4 - i \Leftrightarrow \boxed{z = \frac{-1-4i}{2}}$$

4. On pose $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, on a alors :

$z^2 - \bar{z} = 2 \Leftrightarrow (x+iy)^2 - (x - iy) = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2ixy - y^2 - x + iy = 2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - x + i(2xy + y) = 2$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} x^2 - y^2 & - & x & = & 2 \\ 2xy & + & y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y^2 - x & = & 2 \\ y(2x+1) & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y^2 - x & = & 2 \\ y & = & 0 \end{array} \right. \textbf{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y^2 - x & = & 2 \\ x & = & -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - x - 2 & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right. \textbf{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} -y^2 & = & \frac{5}{4} \\ x & = & -\frac{1}{2} \end{array} \right. \text{(impossible)}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 0 \end{array} \right. \textbf{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 \\ y & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{(On résout à part : } x^2 - x - 2 = 0\text{)}$$