DS 4 - Corrigé

Exercice 1 : Question de cours, 3 points

Solution : Apprendre le cours.

1.

$$\boxed{z^n - a^n = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k} = (z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \dots a^{n-2}z + a^{n-1})}$$

2.

$$\boxed{\text{Le polynôme } P \text{ est factorisable par } z-a \text{ si et seulement si } a \text{ est racine de } P}$$

3. On procède par double implication en commençant par prouver le sens direct :
   $*$ Supposons que P est factorisable par $z-a$, il existe donc un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z) = (z-a)Q(z)$. Pour $z = a$, on obtient :

   $$P(a) = (a-a) \times Q(a) = 0 \times Q(a) = 0$$

   $*$ Démontrons maintenant le sens réciproque.

   Il existe des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que : $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

   Pour tout $k \in \{0, \dots n\}$, d'après la propriété de la question 1., il existe un polynôme Q_k tel que : $z^k - a^k = (z-a)Q_k(z)$ (Remarque : pour $k = 0$, il suffit de prendre $Q_0 = 0$)
   On en déduit, par combinaison linéaire :

   $$\sum_{k=0}^{n} a_k(z^k - a^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z-a)Q_k(z) = (z-a)\sum_{k=0}^{n} a_k Q_k(z)$$

   Et on a aussi : $\sum_{k=0}^{n} a_k(z^k - a^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k - a_k a^k = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n} a_k a^k = P(z) - P(a)$
   Il vient donc :

   $$P(z) - P(a) = (z-a)\sum_{k=0}^{n} a_k Q_k(z)$$

   Sachant que a est racine de P, on en déduit que $P(z) = (z-a)\sum_{k=0}^{n} a_k Q_k(z)$.

   On a montré que P est factorisable par $(z-a)$.

Exercice 2 : Une interpolation

1. On obtient : A(-2, 2), B(-1, 1), C(1, -2) et D(2, -1)
2. On a $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ainsi :

$$\begin{array}{ll} f(-2)=2 \text{ se traduit par : } & -8a+4b-2c+d=2 \\ f(-1)=1 \text{ se traduit par : } & -a+b-c+d=1 \\ f(1)=-2 \text{ se traduit par : } & a+b+c+d=-2 \\ f(2)=-1 \text{ se traduit par : } & 8a+4b+2c+d=-1 \end{array}$$

(a, b, c, d) est donc solution du système linéaire : $\left\{\begin{array}{rcl} -8a+4b-2c+d & = & 2 \\ -a+b-c+d & = & 1 \\ a+b+c+d & = & -2 \\ 8a+4b+2c+d & = & -1 \end{array}\right.$

3. Ce système se met sous la forme $MX = Y$ avec :

$$M = \begin{pmatrix} -8 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La calculatrice calcule M^{-1} ce qui prouve que M est inversible et alors :

$$MX = Y \Leftrightarrow X = M^{-1}Y$$

On obtient : $\boxed{a = \frac{1}{4},\ b = \frac{1}{3},\ c = -\frac{7}{4},\ d = -\frac{5}{6}}$

4.

$$\boxed{f(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3} - \frac{7x}{4} - \frac{5}{6}}$$

Exercice 3

On rappelle que $P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 + (5+4i)z - 10i$

1. Pout tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$P(iy) = (iy)^3 - (2+2i)(iy)^2 + (5+4i)(iy) - 10i = -iy^3 + (2+2i)y^2 + (-4+5i)y - 10i$

$P(iy) = 2y^2 - 4y + i(-y^3 + 2y^2 + 5y - 10)$

On en déduit que :

$$P(iy) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2y^2 - 4y & = & 0 \\ -y^3 + 2y^2 + 5y - 10 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y(y-2) & = & 0 \\ -y^3 + 2y^2 + 5y - 10 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ -y^3 + 2y^2 + 5y - 10 & = & 0 \end{array}\right. \textbf{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2 \\ -y^3 + 2y^2 + 5y - 10 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ -10 & = & 0 \end{array}\right. \textbf{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2 \\ -8+8+10-10 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = 2$$

$$\boxed{a = 2i \text{ est racine de } P}$$

2. On procède par factorisations successives :

$P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 + (5+4i)z - 10i = (z-2i)z^2 + 2iz^2 - (2+2i)z^2 + (5+4i)z - 10i$

$P(z) = (z-2i)z^2 - 2z^2 + (5+4i)z - 10i = (z-2i)z^2 + (z-2i)(-2z) - 4iz + (5+4i)z - 10i$

$P(z) = (z-2i)(z^2 - 2z) + 5z - 10i = (z-2i)(z^2-2z) + 5(z-2i) = (z-2i)(z^2 - 2z + 5)$

$$\boxed{P(z) = (z-2i)(z^2-2z+5)}$$

3. Pour factoriser z^2-2z+5, on utilise le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times 5 = 4-20 = -16$

   On en déduit les deux racines : $z_1 = \dfrac{2-4i}{2} = 1-2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1+2i$. Il vient alors :

$$\boxed{P(z) = (z-2i)(z-1+2i)(z-1-2i)}$$

Exercice 4

On rappelle que $P(z) = z^3 + (2i-3)z^2 + (9-4i)z + 14i - 7$

1. $P(1-2i) = (1-2i)^3 + (2i-3)(1-2i)^2 + (9-4i)(1-2i) + 14i - 7$
   $= 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot(-2i) + 3\cdot 1\cdot(-2i)^2 + (-2i)^3 + (2i-3)(1-2i)^2 + (9-4i)(1-2i) + 14i - 7$
   $= 1 - 6i - 12 + 8i + (2i-3)(1-4i-4) + (9-18i-4i-8) + 14i - 7$
   $= -11 + 2i + (2i-3)(-3-4i) + 1 - 22i + 14i - 7 = -17 - 6i - 6i + 8 + 9 + 12i = 0$
2. Cette fois-ci, on va poser la division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrr|l}
z^3 & +(2i-3)z^2 & +(9-4i)z & +14i-7 & z-1+2i \\
\cline{5-5}
-\big[z^3 & +(2i-1)z^2\big] & & & z^2-2z+7 \\
\hline
 & -2z^2 & +(9-4i)z & +14i-7 & \\
 & -\big[-2z^2 & +(2-4i)z\big] & & \\
\cline{2-4}
 & & 7z & +14i-7 & \\
 & & -\big[7z & +14i-7\big] & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

   On a obtenu : $\boxed{P(z) = (z-1+2i)(z^2-2z+7)}$
3. Pour factoriser z^2-2z+7, on utilise le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times 7 = 4-28 = -24$

   On en déduit les deux racines : $z_1 = \dfrac{2-2\sqrt{6}i}{2} = 1 - i\sqrt{6}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + i\sqrt{6}$. Il vient alors :

$$\boxed{P(z) = \big(z-2i\big)\big(z-1+i\sqrt{6}\,\big)\big(z-1-i\sqrt{6}\,\big)}$$

Exercice 5

1. On utilise l'identité remarquable $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$:

   $z^4 - 1 = (z^2)^2 - 1^2 = (z^2-1)(z^2+1) = (z-1)(z+1)(z^2-i^2) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$

$$\boxed{z^4 - 1 = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$$

2. On procède par équivalences successives à l'aide du théorème du produit nul :

   $z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0 \Leftrightarrow z = 1$ **ou** $z = -1$ **ou** $z = i$ **ou** $z = -i$

3. Pour tout $z \neq \frac{1}{2}$:

z est solution de $\left(\dfrac{z+2+i}{2z-1}\right)^4 = 1$ si et seulement si $Z = \dfrac{z+2+i}{2z-1}$ est solution de : $Z^4 = 1$

Or d'après le résultat de la question précédente :

$$Z^4 = 1 \Leftrightarrow Z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow Z = 1 \ \textbf{ ou } \ Z = -1 \ \textbf{ ou } \ Z = i \ \textbf{ ou } \ Z = -i$$

On en déduit que z est solution de $\left(\dfrac{z+2+i}{2z-1}\right)^4 = 1$ si et seulement si

$\dfrac{z+2+i}{2z-1} = 1$ **ou** $\dfrac{z+2+i}{2z-1} = -1$ **ou** $\dfrac{z+2+i}{2z-1} = i$ **ou** $\dfrac{z+2+i}{2z-1} = -i$

$\Leftrightarrow z+2+i = 2z-1$ **ou** $z+2+i = 1-2z$ **ou** $z+2+i = 2iz-i$ **ou** $z+2+i = -2iz+i$

$\Leftrightarrow -z = -3-i$ **ou** $3z = -1-i$ **ou** $z(1-2i) = -2-2i$ **ou** $z(1+2i) = -2$

$\Leftrightarrow$ $z = 3+i$ **ou** $z = \frac{-1-i}{3}$ **ou** $z = \frac{-2-2i}{1-2i}$ **ou** $z = \frac{-2}{1+2i}$

$\Leftrightarrow$ $z = 3+i$ **ou** $z = \frac{-1-i}{3}$ **ou** $z = \frac{2-6i}{5}$ **ou** $z = \frac{-2+4i}{5}$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est : } \left\{3+i,\ \frac{-1-i}{3},\ \frac{2-6i}{5},\ \frac{-2+4i}{5}\right\}}$$