

## Devoir surveillé n°4

Rappel de quelques consignes de présentation :

- tracer un cartouche et une marge à gauche,
- passer une ligne entre deux questions et bien les numéroter,
- écrire lisiblement et sans ratures,
- encadrer les réponses aux questions.

On rappelle que, conformément au règlement intérieur du lycée :

- « Tout élève convaincu de fraude à un devoir de contrôle est pénalisé par la note zéro, ... ».
- « Pendant les devoirs, la détention et/ou la manipulation de tout appareil électronique comme un téléphone portable ou une tablette caractérisent une tentative de fraude passible de sanctions. »

### — Exercice 1 : Question de cours, 3 points —

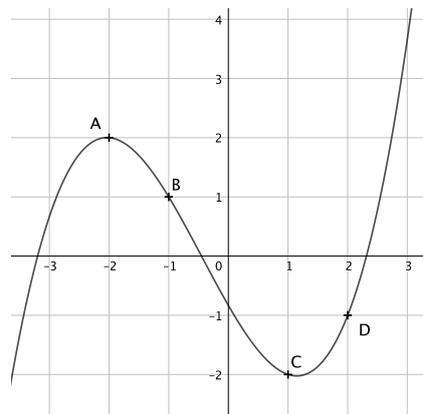
1. Pour un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , donner la factorisation de  $z^n - a^n$  par  $z - a$ . Pour cette question, on ne demande pas de démonstration.
2. Recopier et compléter la propriété du cours :  
« Le polynôme  $P$  est factorisable par  $z - a$  si et seulement si ..... »
3. Donner la démonstration de la propriété ainsi complétée.

### — Exercice 2 : Une interpolation, 3 points —

On a représenté une fonction polynôme réelle de degré 3 :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

1. Par lecture graphique, déterminer les coordonnées des points A, B, C et D appartenant à la courbe représentative de  $f$ .
2. En déduire que  $(a, b, c, d)$  est solution d'un système linéaire que l'on déterminera.
3. Après l'avoir mis sous forme matricielle, le résoudre à l'aide de la calculatrice.
4. En déduire l'expression de  $f(x)$ .



---

**Exercice 3 : 5 points**

---

Soit  $P(z) = z^3 - (2 + 2i)z^2 + (5 + 4i)z - 10i$

1. Montrer que  $P$  admet une racine imaginaire pure  $a = iy$  avec  $y \in \mathbb{R}$ .
2. En déduire une factorisation de  $P$  par  $(z - a)$ .
3. Finir la factorisation de  $P$  en produit de facteurs de degré 1.

---

**Exercice 4 : 4 points**

---

Soit  $P(z) = z^3 + (2i - 3)z^2 + (9 - 4i)z + 14i - 7$

1. Vérifier que  $1 - 2i$  est racine de  $P$ .
2. En déduire une factorisation de  $P$  par  $(z - 1 + 2i)$ .
3. Finir la factorisation de  $P$  en produit de facteurs de degré 1.

---

**Exercice 5 : 5 points**

---

1. Factoriser en produit de facteurs de degré 1 le polynôme  $z^4 - 1$ .
2. En déduire la résolution de l'équation  $z^4 - 1 = 0$ .
3. En utilisant un changement d'inconnue approprié, résoudre alors l'équation :

$$\left( \frac{z + 2 + i}{2z - 1} \right)^4 = 1$$