DS 3 - Corrigé

Exercice 1 : Question de cours, 3 points

Solution : Apprendre le cours.

1. On obtient $AB = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$.
2. Supposons que $ad-bc=0$. On a alors $AB=0$ et si A était inversible en multipliant à gauche par A^{-1} on en déduirait que $B=0$ ce qui n'est pas le cas. On en déduit que si $ad-bc=0$, la matrice A n'est pas inversible.
3. On suppose que $ad-bc \neq 0$. On a alors $AB=(ad-bc)I_2$ d'où $A \times \dfrac{1}{ad-bc}B = I_2$.

   Cette dernière relation montre que A est inversible et que :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Exercice 2 : Un système linéaire

1. Pour écrire matriciellement ce système il suffit de prendre :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 12 & 11 & 13 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

2. On obtient $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -5/12 & 1/3 \\ -3/2 & 11/6 & -2/3 \\ 3/2 & -7/6 & 1/3 \end{pmatrix}$.
3. À l'aide de l'inverse de A, on a $AX=Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : Un calcul de puissance

1. On obtient : $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Il semble que : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. Montrons la propriété par récurrence sur n.

   Initialisation : Pour $n=0$, on a $A^n = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   La propriété est donc vraie pour $n=0$.

Hérédité : On suppose que pour un $n \geqslant 0$ fixé, on a : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que :

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \times 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ceci prouve l'hérédité et achève la récurrence, on a établi que :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Exercice 4 : Un carré pour une inverse

1. On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Vérifions que $a = 2$ et $b = -1$ conviennent :
$2I_3 - A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -6 & -5 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A^2.$
3. D'après ce qui précède on a : $A^2 + A = 2I_3$ d'où $\frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A = I_3$ puis $A\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_3\right) = I_3$.
Cette dernière égalité prouve que A est inversible et que :
$$A^{-1} = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}I_3 = \cdot \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -3/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : Une inversion « à la main »

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} \underline{x} & +2y & -4z & = & a \\ 2x & +3y & -2z & = & b \\ 2x & +4y & -7z & = & c \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff}} \left\{\begin{array}{rrrcrrr} x & +2y & -4z & = & a & & \\ & -y & +6z & = & -2a & +b & \\ & & z & = & -2a & & +c \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rrrcrrr} x & & +8z & = & -3a & +2b & \\ & -y & +6z & = & -2a & +b & \\ & & z & = & -2a & & +c \end{array}\right. \overset{L_2 \leftarrow -L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rrrcrrr} x & & +8z & = & -3a & +2b & \\ & y & -6z & = & 2a & -b & \\ & & z & = & -2a & & +c \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 6L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 8L_3}{\iff}} \left\{\begin{array}{rrrcrrr} x & & & = & 13a & +2b & -8c \\ & y & & = & -10a & -b & +6c \\ & & z & = & -2a & & +c \end{array}\right.$$

$$\text{On a donc } B^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -8 \\ -10 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DS3		Ex 1	1.	2.	3.	Ex 2	1.	2.	3.	Ex 3	1.	2.	3.	Ex 4	1.	2.	3.	Ex 5	1er Pivot	y=	x=	Concl.	Soin	Total
			1,00	**1,00**	**1,00**		**1,00**	**1,00**	**1,00**		**1,00**	**1,00**	**2,00**		**1,00**	**1,50**	**1,50**		**2,00**	**1,50**	**2,00**	**0,50**		20
1			0,75		0,5		1	0,75	1		1	1	1,5		1	1,5	1,5		2	1,5	2	0,5		17,5
2			1	0,5	0		1	0,75	0,75		1	1	2		1	1,5	1,5		1					13
3			1	0	1		1	1	0,75		1	1	1		1	1,5	1,5		2	1,5	2	0,5		17,75
4			0	0	0,5		1	1	1		1	1	2		1	1,5	1,5		1				-0,25	12,25
5			1	0	1		1	0,75	0,25		1	1	2		1	1,5	1,5		2	1,5	2	0,5		18
6			1	0	0,5						1	1	2		1	0,5								7
7			0,5	0,5	1		1	0,75	0,75		1	1	2		1	1,5	0		2	1,5	2	0,5		17
8			1	0,5	0,5		1	0,75	0,5		1	1	1		1	1	0		1	0	0	0		10,25
9			1	0	0		1	0,5			1	1	2		1									7,5
10			1		0,5		1	1	1		1	1	1,5		1	1,5	1,5		2	1,5	1	0		16,5
11			1				1	1	1		1	1	2		1	1,5	1,5		2	1,5	2	0,5		18
12			1		0		1	1	0,25		0,5	1	0,5		1	1	0,5		2	1,5	2	0,5		13,75
13			1	0,5	0,5		1	1	1		1	1	1		1				2	1,5	2	0,5		15
14			1		0,5		1	0,5	0,5		1	1	1,75		1	1,5	1,5		2	1,5	2	0,5		17,25
15			1	0,5	1		1	1	1		1	1	2		1	1,5	0		2	1,5	2	0,5		18
16			1	1	0		1	1	1		0,25	0	0		1	1,5	1		2	0,5	2	0		13,25
17			1	0	0,5		1	0,75	0,25		1	1	2		1	1,5	0,5		2	1,5	2	0,5		16,5
18			0,75	0			1	1	1		1	1	2		1	1,5	1		1,5	0,5				13,25
19			1	0,5	1		1	1	1		1	1	2		1	1,5	1		2	1,5	2	0,5		19
20			1	1	0		1	1	0		1	1	1,5		1	1,5	1		2	1,5	2	0,5		17
21			1	1	1		1	1	1		1	1	1,5		1	1,5	1,5		2	1,5	2	0,5		19,5
22			1	0	0		1	1	1		1	1	1,75		1	1,5	1		2	1,5	2	0,5		17,25
23			1				1	0,75	0		1	1	1,5		1	1,5	0,5		2	1,5	2	0,5		15,25
24			1	0	1		1	1	1		1	1	2		1	1,5	1,5		2	1,5	2	0,5		19
25			1		0,5		1	1	1		1	1	2		1	1,5	0,5		2	1,5	2	0,5	-0,25	17,25
26			1	0,5	1		1	1	1		1	1	1,5		1	1,5	0,5		2	1,5	2	0,5		18
27			1	0	0,5		1	1	1		1	1	1,5		1	1,5	0		2	1,5	2	0,5		16,5
28			1	0	1		1	1	1		1	1	2		1	1,5	0		2	1,5	2	0,5	-0,25	17,25
29			0,75	0	0,75		1	1	1		1	1	2		1	1,5	1		2	1,5	2	0,5		18
30			1	0,5	0,5		1	1	1		1	1	1,75		1	1,5	1,5		2	1,5	2	0,5		18,75
31			1	0	0,5		1	0,5	0,75		1	1	2		1	1,5	0		2	1,5	2	0,5		16,25
32			1	0	1		1	1	1		1	1	2		1	1,5	1		2	1,5	2	0,5		18,5
33			1				1	1	1		1	1	1,5		1	1,5	0,5		2	1,5	2	0,5		16,5
34			1	0	0		1	1	0,5		1	1	1,5		1	1,5	1		2	1,5	2	0,5		16,5
35			1	0	0,5		1	1	1		1	1	1,75		1	1,5	0,5		2	1,5	2	0,5	-0,25	17
36			1	0,5	1		1	0,75	1		1	1	2		1	1,5	1,5		2	1,5	2	0,5		19,25
37			1	0	0		1	1	1		1	1	1,5		1	1,5	1		2	1,5	2	0,5		17
moy																								16,095