# Devoir surveillé n°3

Rappel de quelques consignes de présentation :

- tracer un cartouche et une marge à gauche,
- passer une ligne entre deux questions et bien les numéroter,
- écrire lisiblement et sans ratures,
- encadrer les réponses aux questions.

On rappelle que, conformément au règlement intérieur du lycée :

- « Tout élève convaincu de fraude à un devoir de contrôle est pénalisé par la note zéro, ... ».
- « Pendant les devoirs, la détention et/ou la manipulation de tout appareil électronique comme un téléphone portable ou une tablette caractérisent une tentative de fraude passible de sanctions. »

## Exercice 1 : Question de cours, 3 points

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des réels quelconques.

1. Calculer le produit $AB$ avec $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
2. En déduire que si $ad - bc = 0$ alors $A$ n'est pas inversible.
3. Montrer que si $ad - bc \neq 0$ alors $A$ est inversible et donner l'expression de $A^{-1}$ en fonction de $a$, $b$, $c$ et $d$.

## Exercice 2 : Un système linéaire, 3 points

On considère le système linéaire : $\left\{\begin{array}{lcl} 2x + 3y + 4z & = & 5 \\ 6x + 7y + 8z & = & 9 \\ 12x + 11y + 13z & = & 14 \end{array}\right.$

1. Donner l'écriture matricielle du système sous la forme $AX = Y$ en donnant explicitement les valeurs de $A$, $X$ et $Y$.
2. À l'aide de votre calculatrice, déterminer $A^{-1}$.
3. En déduire la solution du système.

## Exercice 3 : Un calcul de puissance, 4 points

1. Calculer les premières puissances de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Faire une conjecture sur l'expression [1] de $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. À l'aide d'une démonstration par récurrence, prouver la conjecture faite à la question précédente.

## Exercice 4 : Un carré pour une inverse, 4 points

**Dans cet exercice, les calculs seront justifiés sans recours à la calculatrice.**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -6 & -5 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^2$.
2. Montrer [2] qu'il existe deux nombres $a$ et $b$ tels que $A^2 = aI_3 + bA$.
3. En déduire que $A$ est inversible et déterminer l'expression de $A^{-1}$.

## Exercice 5 : Une inversion « à la main », 6 points

En résolvant le système formel associé à la matrice $A$, déterminer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

On utilisera obligatoirement la méthode du pivot.

1. Ne pas donner une formule de récurrence mais une formule explicite pour $A^n$.
2. Vous pouvez formuler une conjecture qu'il suffira de prouver ensuite.