DS 2 - Corrigé

Exercice 1 : Question de cours, 3 points

Solution : Apprendre le cours.

Exercice 2 : : Une équation diophantienne, 6 points

On procède par analyse-synthèse.

Analyse : On considère un éventuel couple (x, y) solution de l'équation, on a donc $x^2 = 33 + 4y^2$ avec $x, y \in \mathbb{N}$ ainsi $x^2 - 4y^2 = 33$.

En factorisant, il vient $(x + 2y)(x - 2y) = 33$. On en déduit que $x + 2y$ et $x - 2y$ sont des diviseurs associés de 33. De plus $x+2y \geqslant 0$, ce sont donc des diviseurs positifs et $x+2y \geqslant x-2y$ ainsi $x + 2y$ est le plus grand des deux diviseurs associés.

L'ensemble des diviseurs positifs de 33 est : $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(33) = \{1, 3, 11, 33\}$. Il n'y a donc que 2 possibilités :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 33 \\ x-2y & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 33 \\ -4y & = & -32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+16 & = & 33 \\ y & = & 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 17 \\ y & = & 8 \end{array}\right.$$

ou

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 11 \\ x-2y & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 11 \\ -4y & = & -8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+4 & = & 11 \\ y & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 7 \\ y & = & 2 \end{array}\right.$$

Synthèse :

Pour $(x, y) = (17, 8)$, on a $x^2 = 17^2 = 289 = 33+256 = 33+4\times 64 = 33+4\times 8^2 = 33+4y^2$.

Pour $(x, y) = (7, 2)$, on a $x^2 = 7^2 = 49 = 33 + 16 = 33 + 4 \times 4 = 33 + 4 \times 2^2 = 33 + 4y^2$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(17, 8),\ (7, 2)\}}$$

Exercice 3 : Une équation diophantienne, (6 points)

1. L'expression $3x^2$ est un polynôme de x à coefficient entier ainsi, d'après la propriété sur les congruences dans les expressions polynomiales, le reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 11 ne dépend que de celui de x par 11.

   On obtient le tableau suivant :

Reste de x par 11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reste de $3x^2$ par 11	0	3	1	5	4	9	9	4	5	1	3

2. L'expression y^5 est un polynôme de y à coefficient entier ainsi, d'après la propriété sur les congruences dans les expressions polynomiales, le reste de la division euclidienne de y^5 par 11 ne dépend que de celui de y par 11.

   On obtient le tableau suivant :

Reste de y par 11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reste de y^5 par 11	0	1	10	1	1	1	10	10	10	1	10

3. Pour une éventuelle solution de l'équation $3x^2 = y^5 - 4$, on a $3x^2 \equiv y^5 - 4 \quad [11]$
Dans le dernier tableau on obtient que 3 restes possibles pour y^5 dans la division par 11 qui sont 0, 1 et 10. On a $0 - 4 \equiv 7 \quad [11]$, $1 - 4 \equiv 8 \quad [11]$ et $10 - 4 \equiv 6 \quad [11]$.
Les valeurs 7, 8 et 6 sont absentes de la deuxième ligne du premier tableau, on ne peut donc jamais avoir $3x^2 \equiv y^5 - 4 \quad [11]$ ce qui montre que :

$$\boxed{\text{l'équation diophantienne } 3x^2 = y^5 - 4 \text{ n'a pas de solutions}}$$

Exercice 4 : 6 points

1. On a $3^3 = 27 = 2 \times 13 + 1$ donc $3^3 \equiv 1 \quad [13]$.
Soit r le reste de n par 3 ainsi il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3q + r$.
On en déduit alors $\left(3^3\right)^q \equiv 1 \quad [13]$ c'est à dire $3^{3q} \equiv 1 \quad [13]$ puis $3^{3q} \times 3^r \equiv 3^r \quad [13]$.
Il vient alors $3^n \equiv 3^r \quad [13]$ ce qui montre que 3^n et 3^r ont même reste par 13 ainsi :

$$\boxed{\text{Le reste de la division euclidienne de } 3^n \text{ par 13 ne dépend que de celui de } n \text{ par 3}}$$

On obtient le tableau suivant :

Reste de n par 3	0	1	2
Reste de 3^n par 13	1	3	9

2. On dresse un tableau qui donne le reste de 8^n par 13 en fonction de n pour les premières valeurs de n :

n	0	1	2	3	4
Reste de 8^n par 13	1	8	12	5	1

On remarque que $8^4 \equiv 1 \quad [13]$, on va donc diviser n par 4 :
Soit r' le reste de n par 4 ainsi il existe $q' \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4q' + r'$.
On en déduit alors $\left(8^4\right)^{q'} \equiv 1 \quad [13]$ c'est à dire $8^{4q'} \equiv 1 \quad [13]$ puis $8^{4q'} \times 8^{r'} \equiv 8^{r'} \quad [13]$.
Il vient alors $8^n \equiv 8^{r'} \quad [13]$ ce qui montre que 8^n et $8^{r'}$ ont même reste par 13 ainsi :

$$\boxed{\text{Le reste de la division euclidienne de } 8^n \text{ par 13 ne dépend que de celui de } n \text{ par 4}}$$

On obtient le tableau suivant :

Reste de n par 4	0	1	2	3
Reste de 8^n par 13	1	8	12	5

3. On procède par analyse-synthèse.
Analyse :
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $13 \mid 8^n - 3^n$. On a donc $8^n \equiv 3^n \quad [13]$ ce qui prouve que 8^n et 3^n ont même reste dans la division euclidienne par 13.
Dans les tableaux obtenus aux questions 1. et 2., la seule valeur commune aux deux secondes lignes est 1. On en déduit que $3^n \equiv 1 \quad [13]$ et $8^n \equiv 1 \quad [13]$ puis, en utilisant encore ces tableaux, que $3 \mid n$ et $4 \mid n$.
En multipliant respectivement par 4 et 3, il vient alors $12 \mid 4n$ et $12 \mid 3n$. Ensuite, par différence : $12 \mid 4n - 3n$ c'est à dire $12 \mid n$. Ainsi il existe $k \in N$ tel que $n = 12k$

Synthèse :
Pour $n = 12k$ avec $k \in \mathbb{N}$, on a $3 \mid n$ et $4 \mid n$ ainsi, d'après les tableaux obtenus aux questions 1. et 2. ; $3^n \equiv 1 \quad [13]$ et $8^n \equiv 1 \quad [13]$ d'où $8^n \equiv 3^n \quad [13]$ puis $13 \mid 8^n - 3^n$.

$$\boxed{13 \mid 8^n - 3^n \text{ si et seulement si } n \text{ est un multiple de 12}}$$

DS2		Ex 1		Ex 2	analyse	systèmes	synthèse	Ex 3	1.	2.	3.	Ex 4	1.	2.	3.	Total
			3,00		**3,00**	**2,00**	**1,00**		**2,00**	**2,00**	**2,00**		**2,00**	**2,00**	**2,00**	21
1			0		2,5	1,5	1		1	1			0	0		7
2			2						1,5	2						5,5
3			1		3	2	1		2	2			0,5			11,5
4					3	1,5	1		0	0			0	0,5		6
5			0		2,5	2	1		0,5	0,5			0,5			7
6			2		3	2	1		2	2	0		0,5	0,5	0,5	13,5
7			3		3	2	1		2	2	2		2			17
8			3		2,5	2	1		0				0,5	0,5	0,5	10
9			0		2,5	1,5	1		1	1	0		2	2		11
10			0		2,5	2	1		0	0			0			5,5
11			0		0	0	0		1	1	0		0			2
12			0,5		1,5	1,5	1		1	1			2	2	0	10,5
13			1,5		2,5	2	1		1,5	1,5			0,5			10,5
14			3		1,5	2	1		1,5	2			0	0		11
15			1		3	1	1		2	2	0,5		0			10,5
16			0		3	2	1		2	2	0,5					10,5
17			0		2,5	1	1		0	0	0		0			4,5
18			0		2,5	2	1		0	0	0					5,5
19			3		2,5	2	1						0,5			9
20			2,5		3	2	1		1,5	2			0,5	0,5	0,5	13,5
21			0		2,5	2	1		2	2	1		0,5	0		11
22			2		1,5	0	0		2	2	0		0		0	7,5
23			2,5		2	1	1						1	1		8,5
24					1,5	2	1		1,5	2	0,5		0,5	0	0	9
25			0		2,5	2	1		2	2	0		0,5	0,5	0,5	11
26			0		2,5	2	1		0,5	0,5						6,5
27			3		0											3
28			0		2,5	2	1		0							5,5
29					3	2	1									6
30			3		2,5	2	1		2	2	0,5		2			15
31			0		2,5	2	1		1	0,5	0					7
32			1		2,5	2	1		2	2	0		0			10,5
33			0,5		3	2	1		1	1			0,5			9
34					2,5	2	1		2	1,5			0,5	0		9,5