

Devoir surveillé n°2

Rappel de quelques consignes de présentation :

- tracer un cartouche et une marge à gauche,
- passer une ligne entre deux questions et bien les numéroter,
- écrire lisiblement et sans ratures,
- encadrer les réponses aux questions.

On rappelle que, conformément au règlement intérieur du lycée :

- « Tout élève convaincu de fraude à un devoir de contrôle est pénalisé par la note zéro, ... ».
- « Pendant les devoirs, la détention et/ou la manipulation de tout appareil électronique comme un téléphone portable ou une tablette caractérisent une tentative de fraude passible de sanctions. »

Exercice 1 : Question de cours, 3 points

Soient a , b , c et d quatre entiers relatifs et m un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que $a \equiv b \pmod{m}$ et $c \equiv d \pmod{m}$. Montrer que $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Exercice 2 : Une équation diophantienne, 6 points

Déterminer les nombres x et y entiers naturels tels que $x^2 = 33 + 4y^2$.

Exercice 3 : Une équation diophantienne, 6 points

1. Soit x un entier relatif quelconque. Justifier que le reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 11 ne dépend que de celui de x par 11. Dresser un tableau donnant le premier en fonction du second.
2. Soit y un entier relatif quelconque. Justifier que le reste de la division euclidienne de y^5 par 11 ne dépend que de celui de y par 11. Dresser un tableau donnant le premier en fonction du second.
3. À l'aide de ce qui précède, montrer que l'équation diophantienne $3x^2 = y^5 - 4$ n'a pas de solution.

Exercice 4 : 6 points

1. Pour n un entier naturel quelconque, démontrer que le reste de la division euclidienne de 3^n par 13 ne dépend que de celui de n par 3.
Dresser un tableau donnant le premier en fonction du second.
2. Pour n un entier naturel quelconque, démontrer que le reste de la division euclidienne de 8^n par 13 ne dépend que de celui de n par un entier que l'on déterminera.
Dresser alors un tableau similaire à celui de la question précédente.
3. À l'aide de ce qui précède, déterminer les valeurs de n tels que $13 \mid 8^n - 3^n$.