# DS1 - Corrigé

Certains calculs intermédiaires sont omis dans ce corrigé. Ils doivent figurer dans une copie !

## Exercice 1 : Quelques calculs

On obtient : $\boxed{z_1 = \dfrac{4+3i}{5}}$ $\boxed{z_2 = \dfrac{7-4i}{5}}$ $\boxed{z_3 = \dfrac{7}{4} + \dfrac{(8-3\sqrt{3})}{4}i}$ et $\boxed{z_4 = 2-11i}$.

## Exercice 2 : Des équations

*Rappel : De manière générale, l'écriture $z = x+iy$ n'est nécessaire* **que** *pour les équations qui comportent simultanément $z$ et $\overline{z}$.*

a)
$$\begin{array}{rrcl} & (3-5i)z & = & 1+z \\ \Leftrightarrow & (3-5i)z-z & = & 1 \\ \Leftrightarrow & (2-5i)z & = & 1 \\ \Leftrightarrow & z & = & \frac{1}{2-5i} \\ \Leftrightarrow & z & = & \frac{2+5i}{29} \end{array}$$

b) On détermine tout d'abord la valeur de $z$ pour laquelle le dénominateur s'annule :
$i\overline{z} - 2 = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = -2i \Leftrightarrow z = 2i$.
Pour $z \neq 2i$ on a alors :
$$\begin{array}{rrcl} & \dfrac{2\overline{z}}{i\overline{z}-2} & = & 2+i \\ \Leftrightarrow & 2\overline{z} & = & (2+i)(i\overline{z}-2) \\ \Leftrightarrow & (3-2i)\overline{z} & = & -4-2i \\ \Leftrightarrow & \overline{z} & = & \frac{-4-2i}{3-2i} \\ \Leftrightarrow & \overline{z} & = & \frac{(-4-2i)(3+2i)}{9+4} \\ \Leftrightarrow & \overline{z} & = & \frac{-8-14i}{13} \\ \Leftrightarrow & z & = & \frac{-8+14i}{13} \end{array}$$

c) Ici on a une équation comportant $z$ et $\overline{z}$ simultanément, il faut faire intervenir les parties réelle et imaginaire :
Pour $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$,
$z + 2\overline{z} = 5-2i \Leftrightarrow x+iy+2(x-iy) = 5-2i \Leftrightarrow 3x - iy = 5-2i$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x & = & 5 \\ -y & = & -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{5}{3} \\ y & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow z = \frac{5}{3} + 2i$$
Note : on a utilisé l'unicité de l'écriture algébrique pour le passage au système.

## Exercice 3 : Un système

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} z & + & (1-i)z' & = & 3-2i \\ (1+i)z & + & z' & = & 2+2i \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2-(1+i)L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcl} z & + & (1-i)z' & = & 3-2i \\ & & (1-(1+i)(1-i))z' & = & 2+2i-(1+i)(3-2i) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z + (1-i)z' = 3-2i \\ -z' = -3+i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3-2i-(3-i)(1-i) \\ z' = 3-i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1+2i \\ z' = 3-i \end{cases}$$

## Exercice 4 : Une homographie

La fonction $f$ associe à tout nombre complexe $z$ différent de $-i+2$, le nombre

$$Z = f(z) = \frac{iz-5}{z+i-2}.$$

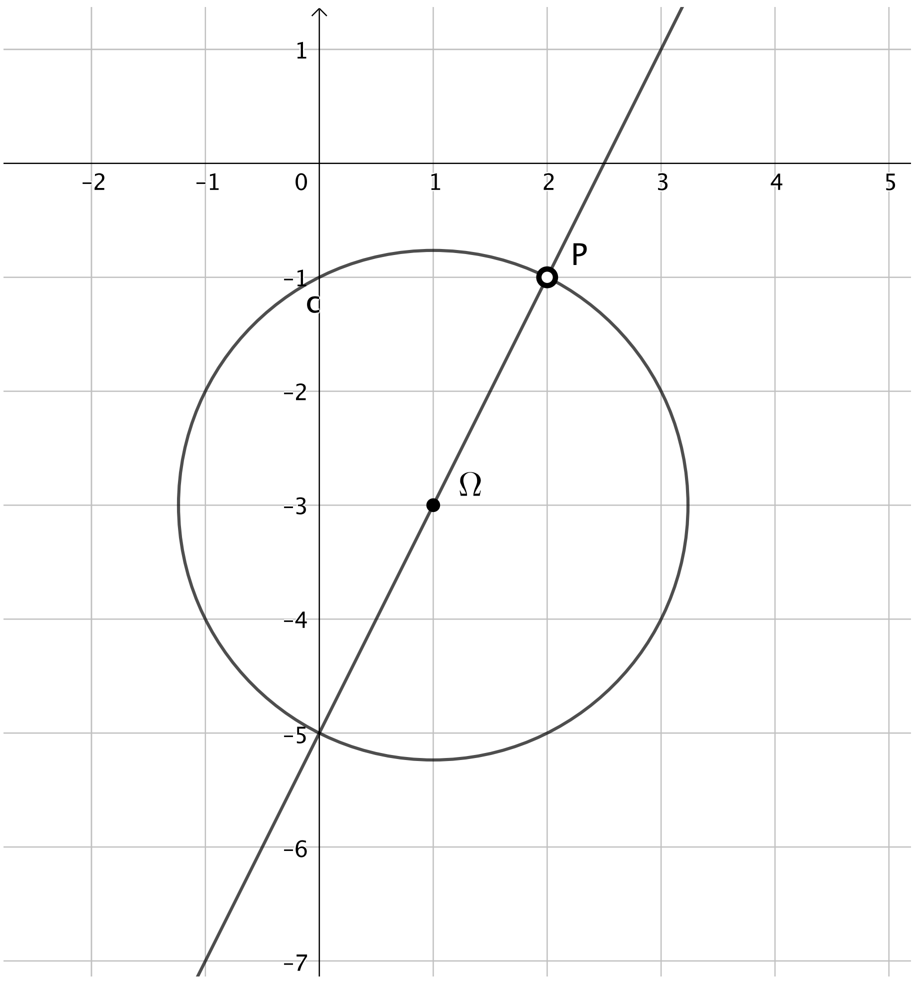
1. Pour $z = x+iy$ avec $(x,y) \neq (2,-1)$, on obtient :

$$Z = \frac{-4x+2y+10}{(x-2)^2+(y+1)^2} + i\frac{y^2+x^2+6y-2x+5}{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

C'est à dire : $\boxed{Re(Z) = \frac{-4x+2y+10}{(x-2)^2+(y+1)^2}}$ et $\boxed{Im(Z) = \frac{y^2+x^2+6y-2x+5}{(x-2)^2+(y+1)^2}}$

2. On a alors : $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y^2+x^2+6y-2x+5=0 \Leftrightarrow (y+3)^2+(x-1)^2=5$
L'ensemble des points M($z$) tels que $f(z)$ soit un réel est le cercle de centre $\Omega\,(1,-3)$ et de rayon $r=\sqrt{5}$ privé du point $P(2-i)$.

On a aussi : $f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow -4x+2y+10=0 \Leftrightarrow y=2x-5$
L'ensemble des points M($z$) tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur est la droite d'équation $y=2x-5$ privée du point $P(2-i)$.



On rappelle le résultat de première sur les équations cartésiennes de cercle :

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $A(x_A, y_A)$ et de rayon $R$. Une équation de $(\mathcal{C})$ est :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

En complément, la mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré dont le coefficient dominant est égal à 1 s'effectue grâce à la manipulation suivante :

$$x^2 + ax = x^2 + 2 \times x \times \frac{a}{2} = x^2 + 2 \times x \times \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

---

Pour vous entrainer, reconnaître des équations de cercle et déterminer le centre et le rayon :

a) $x^2 - 4x + y^2 + 6x + 5 = 0$

b) $x^2 + 3x + y^2 - 7x + \frac{9}{2} = 0$

| DS1 | | Ex 1 | 1. | 2 | 3 | 4 | Ex 2 | 1. | 2. | 3. | Ex 3 | | Ex 4 | 1. | 2. E | 2. F | fig | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | **1,00** | **1,00** | **1,00** | **1,00** | | **1,00** | **2,00** | **2,00** | | **3,00** | | **3,00** | **2,00** | **1,00** | **2,00** | 20 |
| **1** | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 2 | | 2 | | 3 | 1,5 | 0,5 | | 15 |
| **2** | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 2 | 2 | | 1 | | 1 | | | | 11 |
| **3** | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 0,5 | 0 | 0,5 | | 1,5 | | 1 | 0 | 0 | 1 | 8,5 |
| **4** | | | 0,5 | 1 | 0,5 | 1 | | 0 | 0 | 0 | | 2,5 | | 0 | 0,5 | | | 6 |
| **5** | | | 1 | 1 | 0,5 | 0,5 | | 1 | 1,5 | 2 | | 2 | | 2 | 1 | 1 | 0 | 13,5 |
| **6** | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 2 | | 2 | | 3 | 1 | 1 | | 15 |
| **7** | | | 0,5 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 0 | 2 | | 2 | | 3 | 1 | 1 | | 13,5 |
| **8** | | | 1 | 1 | 1 | | | 0,5 | 0 | 0,5 | | 0 | | 2,5 | 2 | 0,5 | 1,5 | 10,5 |
| **9** | | | 1 | 1 | 0,5 | 1 | | 1 | 1,5 | 2 | | 2 | | 3 | 2 | 1 | | 16 |
| **10** | | | 1 | 1 | 1 | 0 | | 1 | 1 | 2 | | 3 | | 1 | 0 | 0 | 0 | 11 |
| **11** | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1,5 | 2 | | 1 | | 3 | 2 | 1 | 2 | 17,5 |
| **12** | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 0,5 | 1,5 | | | | | 0,5 | 0 | 0 | 1 | 7,5 |
| **13** | | | 1 | 0 | 0 | 0,5 | | 0 | 0 | 0,5 | | 2 | | 2 | 1,5 | 0 | | 7,5 |
| **14** | | | 1 | 1 | 1 | 0 | | 0,5 | 0,5 | 2 | | 0 | | 0 | | | | 6 |
| **15** | | | 1 | 0,5 | 1 | 1 | | | 0 | 0 | | 1,5 | | 1,5 | 0,5 | | | 7 |
| **16** | | | 1 | 0,5 | 1 | 1 | | 1 | 2 | 0 | | 2 | | 3 | 1 | 1 | 2 | 15,5 |
| **17** | | | 1 | 1 | 0,5 | 1 | | 1 | 0 | 2 | | 1 | | 2 | 1,5 | 1 | 0 | 12 |
| **18** | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 0,5 | 2 | | 0 | | 3 | 1 | 1 | 1 | 13,5 |
| **19** | | | 0,5 | 1 | 0 | 1 | | 0 | | | | 2 | | 2,5 | | | | 7 |
| **20** | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 0 | | | 1,5 | | 2 | 2 | 0 | | 10,5 |
| **21** | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 2 | 2 | | 3 | | 3 | 2 | 1 | 2 | 20 |
| **22** | | | 1 | 1 | 1 | 0 | | 0,5 | 0 | 0 | | 1 | | 1,5 | 1 | 0,5 | 0,5 | 8 |
| **23** | | | 1 | 0,5 | 0,5 | 0 | | 0 | 0,5 | 0 | | 0 | | 1,5 | 0 | 0 | | 4 |
| **24** | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 0 | 2 | | 2 | | 2 | 2 | 1 | 1 | 15 |
| **25** | | | 1 | 1 | 0,5 | 1 | | 0,5 | 1 | 2 | | 2 | | 2,5 | 1,5 | 0 | | 13 |
| **26** | | | 1 | 1 | 0,5 | 0 | | 0 | 0 | | | 3 | | 3 | 1,5 | 0,5 | 2 | 12,5 |
| **27** | | | 0,5 | 1 | 0,5 | 0 | | 1 | 1,5 | 1 | | 2 | | 2 | 1 | 1 | 2 | 13,5 |
| **28** | | | 1 | 1 | 0,5 | 1 | | 0,5 | | 0 | | 2,5 | | 1,5 | 1,5 | 1 | 1 | 11,5 |
| **29** | | | 1 | 1 | 0,5 | 0 | | 1 | 0 | 2 | | 1 | | 0 | | | | 6,5 |
| **30** | | | 0,5 | 1 | 1 | 1 | | 1 | | 0 | | 2 | | 1,5 | 1 | 0,5 | | 9,5 |
| **31** | | | 1 | 1 | 1 | 0,5 | | | 0 | 2 | | 2,5 | | 3 | 0 | 0 | | 11 |
| **32** | | | 1 | 1 | 0,5 | 0,5 | | 0,5 | 0 | 0 | | 1 | | 3 | 1,5 | 0,5 | 0 | 9,5 |
| **33** | | | 1 | 1 | 0,5 | 1 | | 0 | 0 | 0 | | | | 1,5 | | | | 5 |
| **34** | | | 1 | 1 | 1 | 0 | | 1 | 0 | 1 | | 2 | | 2,5 | 1 | 0,5 | | 11 |
| **35** | | | | | 0 | 0,5 | | 0 | 0 | 0 | | 0,5 | | 0 | 0,5 | 0,5 | | 2 |
| **36** | | | 0 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | | 0 | 1 | | | 2 | | 3 | 1 | 0,5 | | 9 |
| **37** | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 2 | 0 | | 3 | | 3 | 1,5 | 1 | | 15,5 |
| moy | | | | | | | | | | | | | | | | | | 10,82 |