Polynômes

Lycée du parc

Année 2020-2021

Introduction

I Fonctions polynômes, degré d'un polynôme

Définition (Fonctions polynômes)

> On appelle **fonction polynôme** (ou plus simplement polynôme) toute fonction définie sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ pour laquelle il existe des nombres complexes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que :
>
> $$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

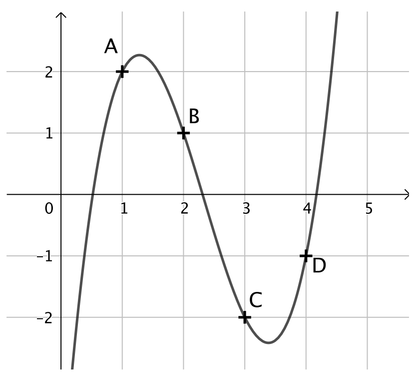
Remarques :

1. Lorsque $a_n \neq 0$, on dit que n est le degré du polynôme et pour $0 \leqslant k \leqslant n$, le nombre a_k est le coefficient de degré k.
2. Lorsque les coefficients sont tous réels, ont dit que P est un polynôme **à coefficients réels.**
3. La fonction constante nulle est aussi une fonction polynôme à laquelle on n'attribuera pas de degré en classe de terminale [1].
4. On admet que si une fonction polynôme P est de valeur constante nulle alors tous les coefficient a_k sont nuls.

Exercice 1 : Matrice et interpolation polynômiale

On a représenté une fonction polynôme réelle de degré 3 :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

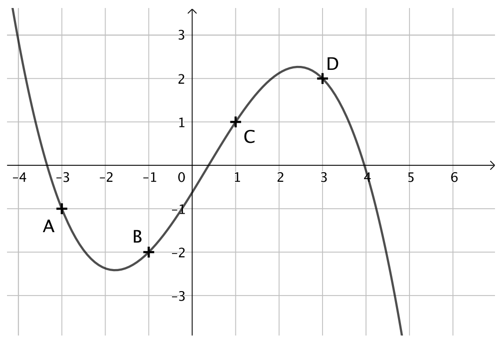


1. Par lecture graphique, déterminer les coordonnées des points A, B, C et D appartenant à la courbe représentative de f.
2. En déduire que (a, b, c, d) est solution d'un système linéaire que l'on déterminera.
3. Après l'avoir mis sous forme matricielle, le résoudre à l'aide de la calculatrice.
4. Vérifier que le graphe correspond.

1. La « bonne » valeur du degré du polynôme nul est $-\infty$.

Entraînement 1

Mêmes consignes pour le polynôme représenté ci-contre.



> **Propriété** (Degré du produit)
>
> Soient P et Q deux polynômes non nuls de degré n et p respectivement.
> La fonction R définie par $R(z) = P(z) \times Q(z)$ est une fonction polynôme de degré $n+p$.

Preuve : Admis[2].

Exercice 2

Montrer que si deux polynômes P et Q sont tels que :

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{C}, \quad (Q(z))^2 = z \times (P(z))^2$$

alors P = Q = 0.

Entraînement 2

On admet que si deux polynômes P et Q sont de degrés différents, alors le degré de $P+Q$ est le plus grand des deux degrés.

Démontrer qu'il n'existe pas de polynôme P qui vérifient :

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = z \times P(z) + i$$

2. Le résultat doit être clair au vu de votre pratique des développements d'expressions polynomiales.

Définition (Racine)

Soit P un polynôme. On appelle **racine** de P tout nombre complexe z_0 tel que $P(z_0) = 0$.

Remarque : Pour un polynôme on parle de racine, le terme de « solution » est réservé aux équations.

Exercice 3

Montrer que le polynôme complexe $P(z) = z^2 - 3iz + i - 1$ n'a pas de racine réelle.

Entraînement 3

On considère le polynôme complexe $P(z) = 9z^3 + 3i\sqrt{2}\,z^2 + (i\sqrt{2} - 7)z - 2$.

Rechercher les éventuelles racines réelles de P.

Exercice 4

Soit P est un polynôme à coefficients réels.
Montrer que si z_0 est racine de P alors $\overline{z_0}$ est racine de P.

II Équation du second degré

On a vu en classe de première la résolution des équations du type $ax^2+bx+c=0$ dans $\mathbb{R}$, on se place maintenant dans $\mathbb{C}$:

Propriété (Équations du second degré à coefficients réels résolues dans $\mathbb{C}$)

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$. On considère l'équation d'inconnue z complexe :

$$az^2+bz+c=0$$

Le nombre réel $\Delta = b^2-4ac$ est le discriminant de cette équation et selon son signe on a :

— Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

— Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution réelle (dite « double ») : $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

— Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions distinctes qui sont deux nombres complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Remarques :

— Une équation qui n'avait pas toujours de solution dans $\mathbb{R}$ en a toujours dans $\mathbb{C}$.[3]

— Il n'est pas nécessaire de recourir au discriminant pour résoudre les équations du type $z^2=a$ où a est un nombre réel : Si $a>0$ il y a deux solutions qui sont $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ et si $a<0$ les solutions sont $-i\sqrt{-a}$ et $i\sqrt{-a}$.

— Si le passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ apporte une grande simplification pour les équations, on y perd autre chose : l'ordre. En effet il n'existe pas dans $\mathbb{C}$ de relation d'ordre compatible avec les opérations algébriques comme l'était la relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$.[4]

Preuve :

3. C'est même le cas de toutes les équations polynomiales ; ce résultat (déjà évoqué et qui est vu en post-bac) est connue sous le nom de « théorème de d'Alembert-Gauss ».

4. C'est pourquoi des écritures du type $z \leq 2+i$ ou $z > 3i$ sont à proscrire et seront *sévèrement* sanctionnées. Par contre, on verra que $|z| \leq 1$, par exemple, reste possible car $|z|$ est un réel.

Exercice 5 Résoudre les équations (1) $z^2 + z + 1 = 0$ et (2) $5z^2 - 3z + \dfrac{1}{2} = 0$.

Entraînement 4

Résoudre les équations (1) $z^2 + 3z + 3 = 0$ et (2) $2z^2 + 3z + 5 = 0$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + z^2 - 12 = 0$

Exercice 7

À l'aide du changement d'inconnue $Z = z + \dfrac{1}{z}$, résoudre l'équation :

$$z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z + 1 = 0$$

Entraînement 5

À l'aide du changement d'inconnue $Z = z - \dfrac{1}{z}$, résoudre l'équation :

$$z^4 + 2z^3 - 5z^2 - 2z + 1 = 0$$

Propriété (Factorisation de $az^2 + bz + c$)

Pour a, b et c trois réels avec $a \neq 0$, on considère le polynôme $f(z) = az^2 + bz + c$.
Avec les notation de la propriété précédente :

- si $\Delta \neq 0$ alors $f(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$,
- si $\Delta = 0$ alors $f(z) = a(z - z_0)^2$.

Preuve :

Remarques :

- Résoudre une équation polynomiale c'est déterminer les racines du polynôme connaissant les coefficients de ce polynôme et c'est généralement difficile mais l'opération inverse est toujours possible et donne lieu à des relations assez simples que l'on appelle les relations coefficients-racines ou relations de Viète [5].
  Dans le cas présent du deuxième degré on a : $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.
  Noter que les coefficients ne sont connus qu'à une même constante multiplicative près.
  Dans le cas de la racine double le résultat reste valable en prenant $z_1 = z_2 = z_0$.
- Il peut parfois être utile de considérer un polynôme ayant des racines données, il suffit alors de poser $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)$.

Exercice 8 Factoriser $f(z) = z^2 + 3z + 5$.

III Factorisation des polynômes

Définition (Polynôme factorisable ou divisible)

> Un polynôme P et dit **factorisable** ou divisible par $z - a$ s'il existe un polynôme Q tel que :
>
> $$\text{pour tout } z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z - a)Q(z)$$

Remarque :
Cette définition est adaptée pour programme de terminale. Dans la définition générale un polynôme D quelconque joue le rôle du polynôme $z - a$.

Exercice 9

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k$. En déduire que $z^n - 1$ est factorisable par $z - 1$.

5. François Viète est un mathématicien français, né à Fontenay-le-Comte (Vendée) en 1540 et mort à Paris le 23 février 1603.

Entraînement 6

À l'aide du résultat de l'exercice précédent montrer que :

— Si n est pair alors $z^n - 1$ est divisible par z+1.

— Si n est impair alors $z^n + 1$ est divisible par z+1.

Propriété

Pour tout nombre complexe a et tout entier naturel non nul n, le polynôme $z^n - a^n$ est divisible par $z - a$:

$$z^n - a^n = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k} = (z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \dots a^{n-2}z + a^{n-1})$$

Remarque : On prendra bien garde à ne pas confondre cette formule avec la formule du binôme.

Preuve :

Corollaire (Racine et factorisation des polynômes)

Le polynôme P est factorisable par $z - a$ si et seulement si a est racine de P.

Preuve :

Exercice 10

Soit $P(z) = z^4 - 4z^2 + 3z + 6$

1. Vérifier que -2 est racine de P.
2. En déduire une factorisation de P.

Entraînement 7

Soit $P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + (4+i)z - 3(1+i)$

1. Vérifier que 1+i est racine de P.
2. En déduire une factorisation de P par $(z - 1 - i)$.
3. Finir la factorisation de P en produit de facteurs de degré 1.

Exercice 11

Soit $P(z) = z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i$

1. Montrer que P admet une racine imaginaire pur $a = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une factorisation de P par $(z-a)$.
3. Finir la factorisation de P en produit de facteurs de degré 1.

Entraînement 8

Mêmes consignes qu'à l'exercice précédent pour $P(z) = z^3 - \frac{3}{2}iz^2 - \frac{3}{4}z + \frac{9}{8}i$.

Propriété

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

Remarque : On peut reformuler cette propriété sous la forme équivalente suivante.
« Le nombre de solutions d'une équation polynomiale est inférieur ou égal à son degré ».
Preuve :