Matrices

Lycée du parc

Année 2020-2021

Introduction

La notion de matrice doit sa découverte à l'étude des systèmes d'équations linéaires initiée par Leibniz [1] en 1683. Plus tard, Gauss puis Cauchy les utilisent pour l'étude des formes quadratiques [2]. Enfin, en 1850, James Joseph Sylvester donne le nom de « matrices » à ces tableaux de nombres et en 1858, son collègue Arthur Cayley publie un article qui leur est entièrement consacré, il est considéré comme le père des matrices.

I Matrices et opérations

Définition (Système linéaire)

Soient a, b, c, d, x_0 et y_0 des réels. Le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & x_0 \\ cx+dy & = & y_0 \end{array}\right.$$

est un système linéaire d'inconnues x, y.

Remarque : une solution d'un tel système linéaire n'est pas un nombre mais un **couple** de nombres.

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système linéaire d'équations : $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 1 \\ 2x+y & = & 0 \end{array}\right.$

1. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) est un philosophe et scientifique allemand, on lui doit, conjointement à Newton, la découverte du calcul différentiel.
2. Un exemple de forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ est : $q(x,y,z) = 4x^2 - 2z^2 + 5xy - 3yz - 6xz$.

Entraînement 1

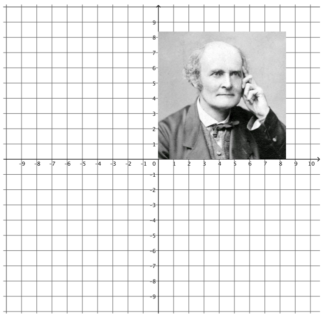
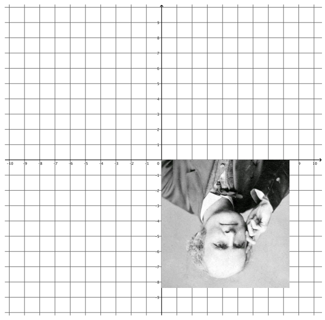
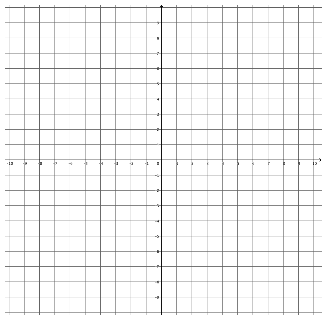
Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système linéaire d'équations : $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y & = & 0 \\ 4x-3y & = & -2 \end{array}\right.$

Exercice 2 : Expressions analytiques de transformations

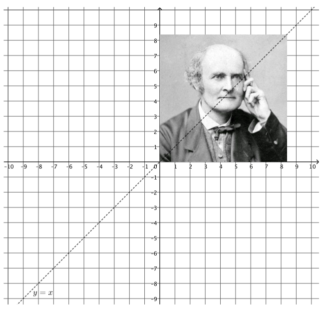
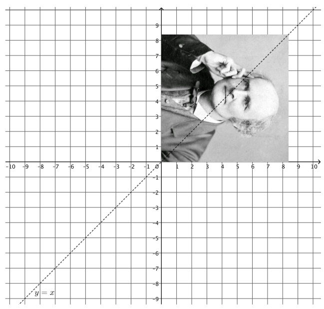
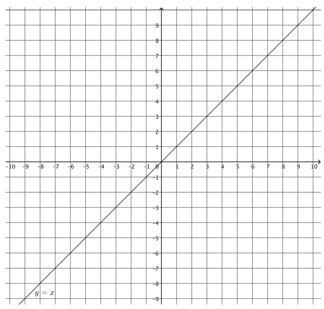
Soit f une transformation du plan qui est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Pour $\mathrm{M}(x, y)$ un point du plan, on note $\mathrm{M}'(x', y')$ l'image de M par f.

Déterminer une expression du type $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & ax+by \\ y' & = & cx+dy \end{array}\right.$ pour les transformations suivantes[3] :

1. $\mathcal{S}_1$, la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

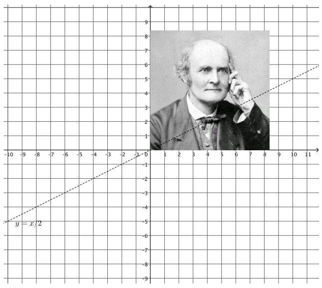
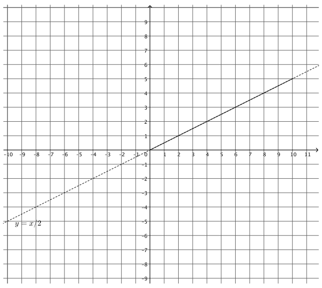
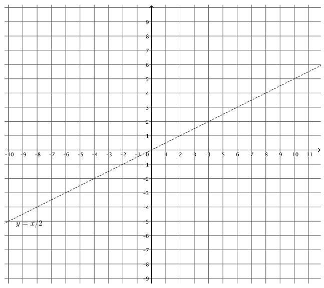




2. $\mathcal{S}_2$, la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice (d'équation $y = x$).

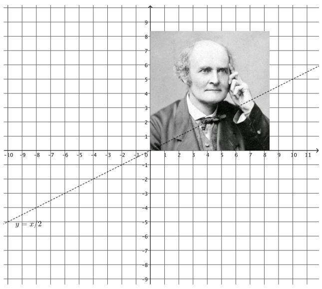
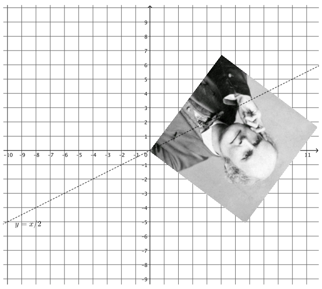
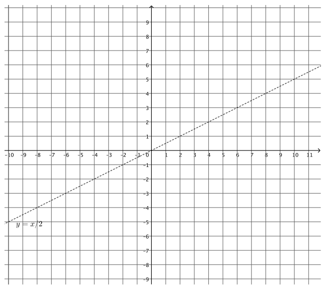




3. Pour illustrer leur action sur le plan, on a fait agir chaque transformation sur un portrait d'Arthur Cayley.

3. $\mathcal{P}_1$, la projection orthogonale sur la droite passant par O et dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

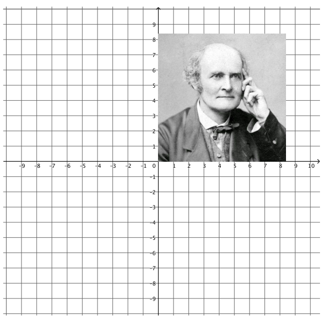
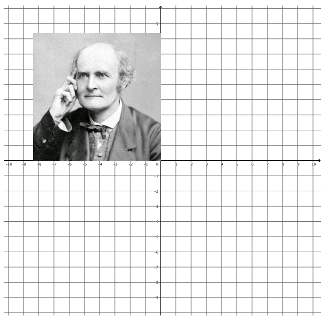
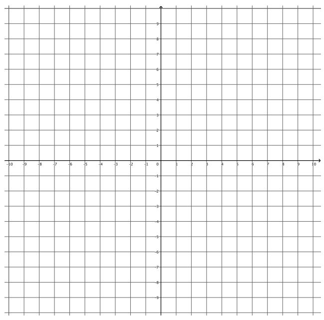




4. $\mathcal{S}_4$, la symétrie orthogonale par rapport à cette même droite.

Entraînement 2

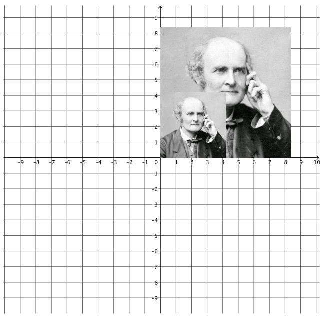
Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.

Quelques autres transformations et leur expression analytique :

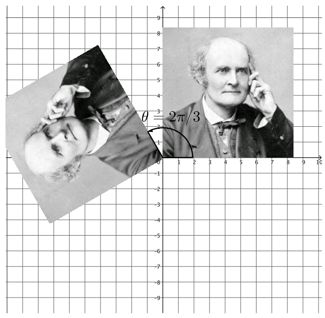
Homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x' &= \frac{x}{2} \\ y' &= \frac{y}{2} \end{cases}$$



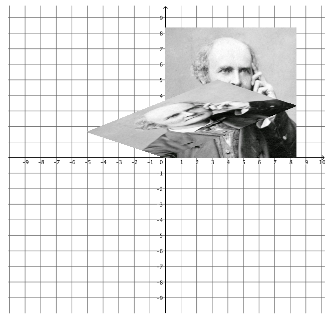
Rotation de centre O et d'angle θ :

$$\begin{cases} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$



Transformation définie par :

$$\begin{cases} x' &= x - 0,6\times y \\ y' &= 0,4\times x + 0,2\times y \end{cases}$$



Définition (Matrices)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

Une matrice A de format (n,p) est la donnée de $n\times p$ nombres $a_{i,j}$ où $i\in\{1,\cdots,n\}$ et $j\in\{1,\cdots,p\}$ que l'on présentent sous la forme d'un tableau comportant n lignes et p colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

On dit que deux matrices A et B sont égales lorsqu'elles ont même format et que leurs coefficients sont deux à deux égaux : pour tout $i\in\{1,\cdots,n\}$ et $j\in\{1,\cdots,p\}$, $a_{i,j}=b_{i,j}$.

Vocabulaire :

— Les nombres $a_{i,j}$ sont appelés *coefficients* de la matrice.
— Une matrice dont tous les coefficients sont nuls est dite nulle.[4]
— Une matrice qui ne comporte qu'une ligne est appelée *matrice ligne.*
— Une matrice qui ne comporte qu'une colonne est appelée *matrice colonne.*
— Une matrice qui comporte n lignes et n colonnes est dite *carrée d'ordre* n.
— Si A est carrée, les éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, \cdots, a_{n,n}$ sont ceux de la *diagonale principale.*

Exercice 3 Quelle matrice intervient dans l'exercice 1 ?

Entraînement 3

Quelle matrice intervient dans l'entrainement 1 ?

4. Attention, deux matrices nulles de formats différents ne sont pas égales.

Définition (Matrice identité)

La matrice identité[5] d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est la matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de ceux situés sur la diagonale principale qui sont tous égaux à 1, on la note I_n :

$$I_1 = (1)\,, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

Définition (Addition, produit par un scalaire)

Soient A et B deux matrices de même format, on définit leur somme $C = A + B$ comme la matrice ayant ce format et dont les coefficients sont la somme deux à deux de ceux de A et B. Les coefficients de C sont données par :

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Pour tout nombre réel λ, la matrice $D = \lambda A$ est de même format que A et tout ses coefficients sont obtenus en multipliant chaque coefficient de A par λ :

$$d_{i,j} = \lambda a_{i,j}.$$

Exercice 4 :

On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $A + B$, $2A$, $(-1) \times B$ et $A + (-2) \times B$.

Entraînement 4

On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 5 \\ -3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

1. Quelles matrices peut-on additionner ? Faire ce calcul.
2. Déterminer $2A$, $-B$ et $\frac{1}{2}C$.

5. La matrice I_n « représente » l'application identique de l'ensemble des n-uplets (noté $\mathbb{R}^n$) dans lui-même, ce qui explique le vocabulaire.

3. **Après** les avoir effectués, vérifier vos calculs à l'aide de votre calculatrice [6].

Propriété (Propriétés de la somme et du produit par un réel)

Soient A, B, C des matrices de même format et λ, μ deux réels. On a alors :

(a) $A + B = B + A$.

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

(c) $1 \times A = A = A \times 1$.

(d) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

(e) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

Preuve : Admis.

Remarque :

L'opposée d'une matrice A est donc la matrice $(-1) \times A$ notée $-A$ et $A - B = A + (-B)$

L'opération qui permet de tirer pleinement profit de la notion de matrice est la multiplication des matrices :

Définition (Produit de deux matrices)

Soit A une matrice de format (n, p) et B une matrice de format (p, q).

Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice C de format (n, q) dont le coefficient $c_{i,j}$ se calcule par :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

On note alors C=AB.

Remarques :

— On pose le calcul sous la forme :

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_j & \cdots & C_q \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{iq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_p \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

6. Pour l'utilisation de la calculatrice, voir livre page 231.

— Le plus souvent les matrices considérées seront carrées de taille n, le produit est alors une nouvelle matrice carrée de même taille.

— Le produit de deux matrices est donc défini si et seulement si le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la deuxième. Le produit AB peut donc être défini sans que BA le soit.

— Même si les produits AB et BA sont tous les deux définis, il n'y a aucune raison qu'ils soient égaux : **la multiplication n'est pas commutative.** [7]

— On peut très bien avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

— On peut avoir $AB = AC$ ou $BA = CA$ sans avoir pour autant $B = C$.

Exercice 5 :

1. Calculer AB puis BA pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Calculer AB pour $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \cdots & \sqrt{n} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \vdots \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}$.

Entraînement 5

On pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ \vdots \\ 1/(n+1) \end{pmatrix}$.

1. Calculer A_1B_1, A_2B_2 et A_3B_3.
2. Pour $n \geqslant 1$ quelconque, calculer A_nB_n.

Exercice 6

1. Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer AX puis vérifier à la calculatrice.

7. Lorsque deux matrices carrés A, B vérifient $AB = BA$, on dit qu'elles commutent, c'est une propriété aussi remarquable (et aussi rare) que celle d'être parallèles pour deux droites.

2. Exprimer sous forme matricielle le système de l'exercice 1.

Entraînement 6

1. On donne $Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \\ \sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}$. Calculer YA.
2. Exprimer sous forme matricielle les transformations de l'exercice 2.

Exercice 7

1. On pose $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$.

   Donner l'expression de tous les coefficients de $C = AB$ en fonction de ceux de A et B.

2. Effectuer les produits : (a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Entraînement 7

1. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer AB et BA.
2. Calculer le produit : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$.
   Calculer dans $\mathbb{C}$ le produit $(a+ib)(c+id)$. Que constatez-vous ?

Exercice 8

On considère deux matrices A et B telles que : A est de format (2, 1), B de format (1, 2) et $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer BA.

Propriété (Propriétés du produit des matrices)

Soient A, B, C et I (matrice unité) des matrices dont les formats rendent les opérations ci-dessous possibles. On a alors :

(a) A(BC)=(AB)C.

(b) A(B+C)=AB+AC.

(c) (A+B)C=AC+BC.

(d) Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $(kA)B = A(kB) = k(AB)$.

(e) IA=AI=A.

Preuve : Admis. □

Exercice 9 :

Une matrice carrée de taille n est dite stochastique lorsque :

— tous ses coefficients sont positifs ou nuls,

— la somme des coefficients de chacune de ses lignes vaut 1.

1. Traduire la deuxième condition de manière matricielle à l'aide de la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
2. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.

II Inverse d'une matrice, lien avec les systèmes linéaires

Définition (Matrice inversible)

> Soit A une matrice carrée de taille n.
> On dit que A est inversible lorsqu'il existe une matrice B carré de taille n telle que :
>
> $$AB = BA = I_n$$
>
> On note alors $B = A^{-1}$

Remarques :
Comme le suggère la définition dans la notation A^{-1} l'inverse est unique. (cf exercice)
Attention, toutes les matrices ne sont pas inversibles ! Cependant une matrice est plus souvent inversible que non.

Exercice 10

1. Montrer que l'inverse d'une matrice est unique.
2. On suppose que A et B sont inversible, quelle est l'inverse de AB ?
3. On suppose que A est inversible. Montrer que si C est une matrice telle que $AC = 0$ alors $C = 0$.
4. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Calculer AB et en déduire que ni A ni B ne sont inversibles.

Entraînement 8

1. Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.
2. Généralisation : Pour une matrice carré A, on dispose de deux matrices $B \neq C$ telles que $BA = CA$. Que dire de A ?

Exercice 11 Calculer le produit : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Propriété (Caractérisation des matrices carrées inversibles de taille 2)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle.

A est inversible si et seulement si le nombre $ad - bc$ est non nul [8].

L'inverse de A est alors la matrice $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Preuve :

Définition (Ecriture matricielle d'un système linéaire)

Un système linéaire de n équations à p inconnues peut s'écrire sous la forme $AX = Y$ où A est une matrice de format (n, p), X la matrice colonne des inconnues et Y une matrice colonne constante.

Exercice 12 : Écrire sous forme matricielle les systèmes suivants.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ -x + 2y = 1/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + 2y - 2z = -1 \\ y + z/2 = 2 \\ 3x - y = 2/3 \end{cases}$$

8. On dit que $ad - bc$ est le *déterminant* de A.

Propriété (Système linéaire carré et inversion des matrices)

Soit A est une matrice carrée de taille n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

— A est inversible

— quelle que soit la matrice colonne Y, le système linéaire $AX = Y$ d'inconnue X admet une unique solution.

Preuve : voir annexes

Remarque : dans le cas où A est inversible, la solution de $AX = Y$ est donnée par $X = A^{-1}Y$.

Corollaire

Soit A une matrice **carrée** de taille n.

Si il existe une matrice B telle que $AB = I_n$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Si il existe une matrice B telle que $BA = I_n$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Preuve : Admis.

Propriété (Caractérisation des matrices inversibles de taille quelconque)

Soit A une matrice carrée de taille n.

Si la seule matrice colonne X telle que $AX = 0$ est la matrice colonne $X = 0$ alors A est inversible.

Preuve : Admis. □

Exercice 13

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible.

2. Que dire d'une matrice carrée dont tous les coefficients situés sous la diagonale sont nuls et dont aucun de la diagonale n'est nul ?

Exercice 14

On considère le système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} x & +y & -z & = -1 \\ 2x & & -z & = 2 \\ -x & -2y & +z & = 3 \end{cases}$

1. Écrire le système sous forme matriciel.
2. En utilisant la calculatrice, en déduire la résolution de $\mathcal{S}$.

Entraînement 9

Même consigne qu'à l'exercice précédent pour le système $\mathcal{S}'$: $\begin{cases} x & +2y & -z & = 1 \\ x & & -2z & = -3 \\ -x & -y & +2z & = 2 \end{cases}$

Exercice 15

En résolvant[9] le système associé par la méthode du pivot, calculer l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

9. Calculatrice seulement pour vérifier à la fin.

Entraînement 10

Même consigne qu'à l'exercice précédent pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

III Puissances d'une matrice

Définition (Puissances d'une matrice carrée)

Soit A une matrice carrée.
Pour tout entier naturel n, on note A^n la matrice définie par :

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ facteurs}}$$

Remarque : Pour $n = 0$ on a $A^0 = I_p$ où p est la taille de la matrice A.

Exercice 16 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les premières puissances de A.
2. Faire une conjecture sur l'expression de A^n.
3. À l'aide d'une démonstration par récurrence, prouver la conjecture faite à la question précédente.

Annexes

Avant propos

L'idée principale de la démonstration qui suit est de décomposer les matrices en colonnes : pour A, B et C des matrices carrées de même taille n, on note $B_1, \ldots, B_n$ et $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de B et C respectivement. On dispose alors de l'équivalence :

$$AB = C \text{ si et seulement si pour tout } j \in \{1, \ldots, n\},\ AB_j = C_j.$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & \cdots & B_j & \cdots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{array} \end{array} = C$$

Propriété (Système linéaire carré et inversion des matrices)

Soit A est une matrice carrée de taille n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

— A est inversible

— quelle que soit la matrice colonne Y, le système linéaire $AX = Y$ d'inconnue X **admet** une **unique** solution.

Preuve :

$\boxed{\Rightarrow}$

En multipliant à gauche par A^{-1} (pour le sens direct) et par A (pour le sens réciproque) on obtient l'équivalence :

$$AX = Y \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}Y$$

Ce qui montre l'existence et l'unicité de la solution.

$\boxed{\Leftarrow}$

On suppose que, pour toute matrice colonne Y de taille n, le système linéaire $AX = Y$ d'inconnue X admet une unique solution.

On note $Y_1, \ldots, Y_n$ les colonnes de la matrice I_n.

D'après l'hypothèse, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe une unique solution au système $AX = Y_j$, on la note B_j. On forme ensuite la matrice carrée B dont les colonnes sont les B_j.

Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ on a $AB_j = Y_j$ ainsi $AB = I_n$.

Il reste à montrer qu'on a aussi $BA = I_n$.

On remarque que $A(BA - I_n) = ABA - A = (AB)A - A = I_nA - A = A - A = 0$.

On en déduit que les colonnes C_j de $C = BA - I_n$ sont solutions de $AX = 0$ or la colonne nulle est aussi solution de ce système ainsi, par unicité de la solution, on en déduit que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $C_j = 0$ d'où $C = 0$ ainsi $BA = I_n$.

Remarque : on montre de la même façon que A est inversible si et seulement si les équations de la forme $XA = Y$ admettent une unique solution. Il suffit pour cela de raisonner sur les lignes plutôt que sur les colonnes.