Nombres complexes I

Maths expertes

Année 2020-2021

Introduction historique

Au début du XVI$^{\text{ème}}$ siècle en Italie, Scipione del Ferro, découvre une formule permettant de résoudre les équations du type $x^3 + px = q$. Plus tard, Raphaël Bombelli, en appliquant cette formule à certaines équations fait apparaître un nombre « impossible » : $\sqrt{-1}$ comme intermédiaire dans un calcul menant à une solution exacte. On retient généralement cet événement comme marquant la naissance des nombres complexes mais ils mirent plusieurs siècles avant de s'imposer réellement.

L'objectif de ce chapitre est d'introduire ce nouvel ensemble de nombres et de se familiariser avec leur manipulation.

I Ensemble de nombres et équations, définition des nombres complexes

Les nombres complexes occupent une place particulière dans les mathématiques car il permettent de résoudre définitivement un problème naturel, celui des équations algébriques. Examinons le lien qui existe entre équations et ensembles de nombres :

— L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ s'impose de lui-même et on y définit une addition qui permet de poser des équations du type $5 + x = 3$ mais celle-ci n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$. Pour résoudre les équations de ce type, on est amené à définir l'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z}$. Dans cet ensemble l'équation admet .... comme solution.

— Dans $\mathbb{Z}$, on a une addition et une multiplication, on peut donc y poser l'équation $3x-5 = 0$ mais elle n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$, par contre dans $\mathbb{Q}$, elle admet .... comme solution.

— Dans $\mathbb{Q}$, on peut poser l'équation $x^2 - 2 = 0$ mais elle n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, par contre dans $\mathbb{R}$, elle admet .... comme solution**s**.

— Dans $\mathbb{R}$, on peut poser l'équation $x^2 + 1 = 0$ mais elle n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, on envisage alors que cette équation ait une solution dans un ensemble plus vaste de nombres ce qui oblige d'admettre l'existence d'un nombre i **qui n'est pas un réel** tel que $i^2 = -1$.

Examinons ce qu'il advient alors :

À la lumière de ces calculs le théorème suivant n'étonnera plus personne :

Théorème (Existence du corps des nombres complexes)
Il existe un ensemble de nombres dits *complexes* contenant les nombres réels et d'autres nombres dont un nombre noté i vérifiant $i^2 = -1$. Cet ensemble, noté $\mathbb{C}$, est muni des mêmes règles de calcul que celles de $\mathbb{R}$.
De plus, tout nombre complexe s'écrit de **manière unique** sous la forme $z = a + ib$ avec a et b des nombres réels.

Preuve : Admis.[1] □

Remarques :

1. La forme $z = a+ib$ avec a et b des nombres réels est appelée *forme algébrique* du complexe.
2. Pour résumer, $\mathbb{C}$ est obtenu à partir de $\mathbb{R}$ en ajoutant un nombre i tel que $i^2 = -1$ or $(-i)^2 = \big((-1)\cdot i\big)^2 = (-1)^2 i^2 = 1\cdot(-1) = -1$ ainsi i étant « choisi », $-i$ conviendrait tout aussi bien à cette construction. La conséquence de cette ambivalence est l'existence d'une symétrie interne qui échange i et $-i$ agissant sur les complexes que l'on appelle la conjugaison.[2]
3. La construction présentée précédemment qui fait passer de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$ puis à $\mathbb{Q}$ et ensuite à $\mathbb{R}$ s'arrête avec $\mathbb{C}$, en effet on doit à d'Alembert l'énoncé du théorème suivant dont la première démonstration rigoureuse revient à Gauss : *Tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine complexe.*[3]

Exercice 1 Calculer sous forme algébrique les nombres suivants.

$z_1 = 2 - i + 3i - 7$, $z_2 = -\dfrac{i}{2} + 5 + 3i$, $z_3 = i - 3(-i+4)$, $z_4 = -i \cdot i$,
$z_5 = (1+i)(-2+3i)$, $z_6 = (1-2i)^2$, $z_7 = (1-i)(1+i)$, $z_8 = i(2+i)^2$.

1. On peut définir un nombre complexe comme un couple (a, b) de nombres réels, la somme est alors définie par : $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ et le produit par $(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$, il reste alors à vérifier que toutes les propriétés usuelles de la somme et du produit sont vérifiées (associativité, commutativité, existence de l'élément neutre pour chaque opération, de l'opposé, de l'inverse et distributivité), c'est fastidieux mais ne pose pas de problème particulier. Dans le chapitre à venir des matrices, on verra une preuve assez simple de l'existence de $\mathbb{C}$.
2. L'ensemble des réels ne présente pas une telle symétrie interne.
3. Le théorème de d'Alembert-Gauss appelé aussi théorème fondamental de l'algèbre est hors programme en T^{al}.

Entraînement 1

Même consigne avec :

$z_1 = 1 - 2i(3i+5)$, $z_2 = \left(2 - \dfrac{i}{2}\right)\left(3i - \dfrac{1}{2}\right)$, $z_3 = (1+i)^2$, $z_4 = (1-i)^2$.

Propriété (Inverse d'un nombre complexe)

Tout nombre complexe z non nul admet un unique inverse, noté $\dfrac{1}{z}$ tel que $z \times \dfrac{1}{z} = 1$.
L'inverse du nombre complexe $z = a + ib$ où a et b sont des réels est le nombre :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

Preuve :

Exercice 2 Calculer les nombres suivants sous forme algébrique :

$$z_1 = \frac{1}{i+3}\ , \qquad z_2 = -\frac{i}{2+i} - 3i\ , \qquad z_3 = \frac{2-i}{i+1}\ , \qquad z_4 = 1 + \frac{2}{(2-i)^2}\ .$$

Entraînement 2

Même consigne avec :

$$z_1 = \frac{2i}{1-2i} + 2\ , \qquad z_2 = \frac{i}{1+2i} - 3\ , \qquad z_3 = \frac{i-2}{i-1}\ , \qquad z_4 = \frac{2i}{(2+i)^2}\ .$$

Corollaire (Théorème du produit nul)
Dans $\mathbb{C}$, le théorème du produit nul reste valable :

$$z \times z' = 0 \Longleftrightarrow z = 0 \text{ ou } z' = 0.$$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1.) $2iz+3 = 4-i+z$, 2.) $(2z+i)(iz-1) = 0$ 3.) $z^2+4 = 0$ 4.) $\dfrac{2+z}{1-iz} = 2i$.

Entraînement 3

Même consigne avec :

1.) $z + 3i = 2i - 1 + iz$, 2.) $z^2 = -3$ 3.) $z^2 + 2iz - 1 = 0$ 4.) $\dfrac{2i+z}{i+iz} = 2$.

Exercice 4

Calculer $z_0 = (2-i)^2$ et en déduire la résolution de l'équation $z^2 = 3 - 4i$.

II Partie réelle, partie imaginaire

Vocabulaire, notation

Dans l'écriture unique $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, le nombre a s'appelle la partie réelle et b la partie imaginaire de z. On note alors $a = \mathcal{R}e(z)$ et $b = \mathcal{I}m(z)$.

Attention, la partie imaginaire est un nombre **réel** !

- Si $\mathcal{R}e(z) = 0$ on dit que z est imaginaire pur, il s'écrit alors $z = ib$ (avec $b \in \mathbb{R}$) [4],
- si $\mathcal{I}m(z) = 0$ on dit que z est réel, il s'écrit alors $z = a$ (avec $a \in \mathbb{R}$).

Avertissement

Dans l'ensemble des nombres complexes, on ne peut plus utiliser le symbole $\sqrt{}$. Ainsi, par exemple, $\sqrt{1+i}$ n'a pas de sens car il serait ambigu : il y a deux nombres complexes vérifiant $z^2 = 1 + i$ et on ne peut pas en privilégier un de manière *naturelle*.

Propriété (Caractérisation de l'égalité sous forme algébrique)

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$z = z' \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{R}e(z) & = & \mathcal{R}e(z') \\ \mathcal{I}m(z) & = & \mathcal{I}m(z') \end{array} \right.$$

Preuve : Exercice, c'est une conséquence de l'unicité de l'écriture algébrique. □

Exercice 5

Pour tout x et y réels, on considère le nombre complexe $z = x + iy$.

Pour $z \neq i$, on pose $Z = \dfrac{z}{z - i}$. Déterminer la forme algébrique de Z en fonction de x et y.

Entraînement 4

Pour tout x et y réels, on considère le nombre complexe $z = x + iy$.

4. On note ainsi naturellement $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

Pour $z \neq i$, on pose $Z = \dfrac{1+z}{iz+1}$. Déterminer la forme algébrique de Z en fonction de x et y.

Exercice 6

Déterminer les éventuelles valeurs des nombres réelles x et y telles que $(3-i)x-2iy = 4+4i$.

Entraînement 5

Même consigne avec $(2x-i)(1+i)-3iy+1 = 2i$.

Propriété (Propriétés des fonctions $\mathcal{R}e$ et $\mathcal{I}m$)

Pour z et z' quelconques dans $\mathbb{C}$,

$\mathcal{R}e(z+z') = \mathcal{R}e(z) + \mathcal{R}e(z')$ et $\mathcal{I}m(z+z') = \mathcal{I}m(z) + \mathcal{I}m(z')$.

Attention, pour le produit entre deux complexes ça ne marche plus, par contre on a :

Pour z dans $\mathbb{C}$ et λ dans $\mathbb{R}$,

$\mathcal{R}e(\lambda z) = \lambda \cdot \mathcal{R}e(z)$ et $\mathcal{I}m(\lambda z) = \lambda \cdot \mathcal{I}m(z)$.

Preuve : C'est une conséquence de l'unicité de l'écriture algébrique.

Exercice 7

On donne $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

Déterminer, en fonction de x et y, les parties réelle et imaginaire de $Z = (z+1+i)^2$.

III Conjugaison

Définition (Conjugaison)

Pour $z = a + ib$ avec a et b des réels, on définit le nombre conjugué de z par $\overline{z} = a - ib$.

La conjugaison est la « symétrie interne » évoquée précédemment, elle a toutes les bonnes propriétés vis à vis des opérations algébriques comme l'énonce la propriété suivante :

Propriété (Propriétés de la conjugaison)

Pour tout z et z' dans $\mathbb{C}$:

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$, $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$,

$\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ (pour $z' \neq 0$), $\overline{\overline{z}} = z$ et $\overline{(z^n)} = \overline{z}^n$.

On a aussi pour tout z dans $\mathbb{C}$:

$\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$, $\overline{z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$ (imaginaire pur),

$\mathcal{R}e(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $\mathcal{I}m(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Preuve :

Exercice 8

Déterminer **une** expression des conjugués des nombres suivants.

$z_1 = 2 + i,\qquad z_2 = -2i,\qquad z_3 = \dfrac{2+i}{-i+5},\qquad z_4 = z + i\overline{z},\qquad z_5 = -5.$

Entraînement 6

Même consigne avec :

$z_1 = -i(2+3i),\qquad z_2 = \dfrac{i}{-i+3},\qquad z_3 = \dfrac{-2-i}{-2i+5},\qquad z_4 = -\overline{z}+iz,\qquad z_5 = 1+\sqrt{2}.$

IV représentation géométrique des nombres complexess

On se représente l'ensemble des réels par une droite munie d'un repère. Pour les nombres complexes on utilise le plan, on parle alors de plan complexe ou plan de Cauchy :

Définition (Images ponctuelles et vectorielles dans le plan complexe, affixes de points et vecteurs)

> Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
>
> On associe à tout nombre complexe $z = a + ib$, le point M de coordonnées (a, b). On dit alors que M est l'image ponctuelle de z et on le note $M(z)$. Inversement, on dit que z est l'affixe de M et on la note z_M.
>
> On associe aussi à tout nombre complexe $z = a + ib$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ de coordonnées $\binom{a}{b}$. On dit alors que $\overrightarrow{w}$ est l'image vectorielle de z et on le note $\overrightarrow{w}(z)$. Inversement, on dit que que z est l'affixe de $\overrightarrow{w}$ et on la note $z_{\overrightarrow{w}}$.

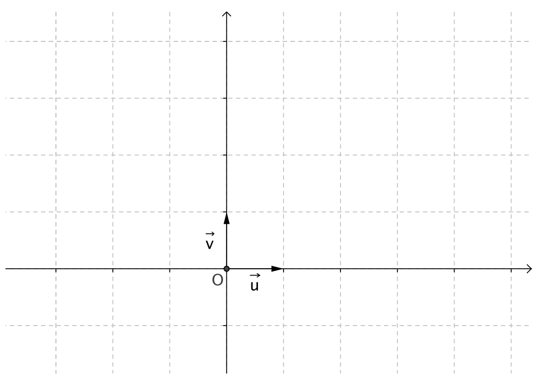
Remarque : En mathématiques, « affixe » est un mot de genre féminin, on dit **une** affixe.

Exercice 9

Placer ci-contre les points A, B, C et D d'affixes :

$z_A = 2+i$, $z_B = -2-i$, $z_C = \overline{z_A}$ et $z_D = 3i$.

Lire l'affixe du milieu M de $[AC]$ ainsi que celles des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}$.

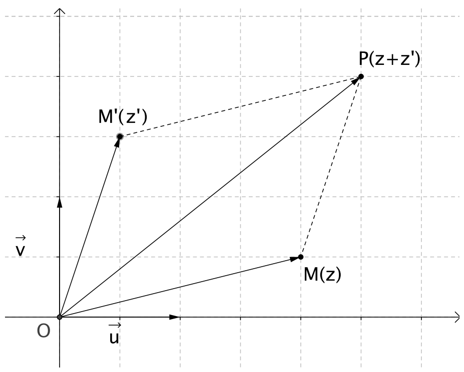


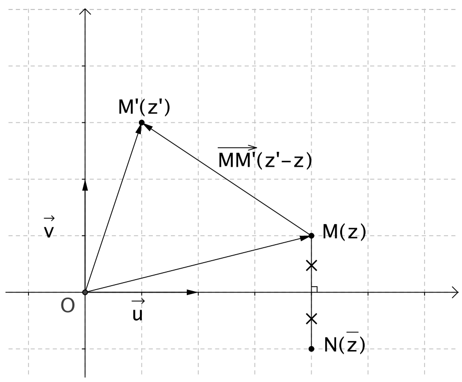
Propriété (Géométrie et opérations sur les complexes)

Soient z et z' deux complexes dont les images ponctuelles sont les points $M(z)$ et $M'(z')$.

1. $z+z'$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$ qui est aussi celle du point P tel que $OMPM'$ soit un parallélogramme.
2. $z'-z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ et $\frac{z+z'}{2}$ est l'affixe du milieu de [MM'].
3. $\overline{z}$ est l'affixe du point N symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
4. $\dfrac{z+z'}{2}$ est l'affixe du milieu I du segment [MM'].

Preuve : Exercice. □





Exercice 10

On considère la fonction f qui associe à tout nombre complexe z différent de i, le nombre $f(z)=\dfrac{z-2}{z-i}$.

1. Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que $f(z)$ soit un réel.
2. Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur.

Entraînement 7

Mêmes questions qu'à l'exercice précédent pour $f(z) = \dfrac{z-2+i}{z+2i}$ avec z différent de $-2i$.

V Symbole sigma

Pour écrire des sommes d'un nombre arbitraire de termes, on avait jusqu'à présent recours à l'utilisation de $\dots$ comme dans $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Il est maintenant nécessaire de passer à une écriture plus générale et plus précise.

Définition (Utilisation du symbole Σ)

Pour écrire la somme de termes d'une suite, on utilise le symbole sigma qui est l'écriture majuscule de la 18ème lettre de l'alphabet grec : Σ.

Si (u_n) est une suite, pour p et q deux entiers tels que $p \leq q$, la somme des termes consécutifs de la suite à partir du p-ième et jusqu'au q-ième se note :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{q-1} + u_q$$

Remarques :
- Lire « somme pour k allant de p à q des u_k » ou « sigma pour k allant de p à q des u_k ».
- L'entier p est l'indice du premier terme de la somme, l'entier q celui du dernier terme.
- L'entier k est l'indice de la somme, il ne désigne qu'une numérotation des termes de la somme dont la valeur ne changera pas si on les renumérote ; cette transformation est un changement d'indice (cf plus bas).
- L'indice n'a de signification qu'à l'intérieur de la notation (on parle de variable muette) mais pour éviter toute confusion, la lettre utilisée ne devra pas apparaitre à l'extérieur de la somme, en particulier des notations comme $\sum\limits_{k=1}^{k} u_k$ ou $k \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ sont impropres.
- À la place de u_k figure généralement une formule donnant la valeur du terme correspondant à l'indice k.

Exercice 11

Calculer :

$S_1 = \sum\limits_{k=1}^{5} k \qquad S_2 = \sum\limits_{k=1}^{4} 1 \qquad S_3 = \sum\limits_{k=2}^{2} k^2 \qquad S_4 = \sum\limits_{k=1}^{4} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

Exercice 12 : Écrire à l'aide du symbole Σ les sommes suivantes :

$S_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2 + 10^2$ $\qquad$ $S_2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 13 + 15$

$S_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \cdots + \dfrac{n-1}{n}$ $\qquad$ $S_4 = \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Exercice 13 : Écrire avec le symbole sigma les formules donnant la somme des termes d'une suite arithmétique puis géométrique.

Les propriétés usuelles de la somme donnent lieu à certaines propriétés du symbole sigma :

Propriétés

Linéarité :

$$\sum_{k=p}^{q} a_k + b_k = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=p}^{q} b_k, \quad \text{et pour tout } \lambda \text{ (indépendant de } k\text{)}, \quad \sum_{k=p}^{q} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=p}^{q} a_k.$$

Séparation de la somme en deux ; pour tout r tel que $p \leq r < r+1 \leq q$:

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{q} a_k$$

Exercice 14

Pour a un réel donné quelconque, calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+a)$

Exercice 15

On donne la formule : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

En déduire, en fonction de n, la valeur de : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$

Entraînement 8

À l'aide de la formule donnée ci-dessus, calculer $S_2 = 1 \cdot n + 2(n-1) + \cdots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1$

Exercice 16

Écrire de deux manières différentes à l'aide de Σ la somme
$S = 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) + (n+2)$

Quel lien peut-on faire entre les indices dans les deux sommes ?

Propriété (Changement d'indice dans les sommes)

Pour tout entier l fixé, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k$ ne change pas en remplaçant l'indice k par $j = k + l$.

Pour effectuer ce changement, on remplace l'indice du premier terme par $p + l$, celui du dernier terme par $n + l$ et u_k par u_{j-l} :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k \overset{j=k+l}{\underset{k=j-l}{=\!=\!=}} \sum_{j=p+l}^{n+l} u_{j-l}$$

Remarque :

— lors d'un changement d'indice, vérifier que le premier terme ainsi que le dernier terme de la somme n'ont pas changé, cela évitera bien des erreurs ....

— On peut réécrire une somme avec l'indice initial après un changement d'indice ainsi : $\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{j=p+l}^{n+l} u_{j-l} = \sum_{k=p+l}^{n+l} u_{k-l}$.

— On peux aussi opérer des changements d'indice qui inversent l'ordre des termes, par exemple : en effectuant le changement $j = n-k$, on obtient $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{j=0}^{n} u_{n-j} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}$.

Exercice 17

En remarquant que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

VI Formule du binôme de Newton

Exercice 18

Donner tous les couples de deux nombres positifs ou nuls dons la somme est 0 puis 1, 2, 3 et 4. Indication : Pour 0 on a un seul couple, pour 1 on en a deux, .. etc.

Exercice 19

Calculer successivement $B_0 = (u+v)^0$, $B_1 = (u+v)^1$, $B_2 = (u+v)^2$, $B_3 = (u+v)^3$, $B_4 = (u+v)^4$, $B_5 = (u+v)^5$.

Présenter les résultats dans un grand triangle. Que remarquez-vous ?

Définition (Coefficients du binôme)

Partant du seul nombre 1, on construit le triangle de Pascal en additionnant deux nombres successifs sur une même ligne pour placer le résultat sous le second de ces nombres. Les lignes portent des numéros commençant à $n = 0$ et les colonnes à $k = 0$:

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	…
0	**1**					…
1						…
2						…
3						…
4						…
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, le nombre figurant à la ligne n et la colonne k du triangle de Pascal se note $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n », c'est le nombre de combinaisons de k objets parmi n [5].

La méthode de construction du triangle se traduit par la formule de Pascal :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Remarques :

— Lors de la construction du triangle, un nombre absent (trop à gauche ou trop à droite) est considéré comme nul.

— On peut parfois rencontrer une notation ancienne C_n^k à la place de $\binom{n}{k}$.

5. Voir le chapitre combinatoire en spécialité.

Exercice 20 Déterminer $\binom{8}{3}$ et $\binom{6}{9}$ en poursuivant le triangle si nécessaire.

Entraînement 9

Calculer la somme des nombres de chacune des lignes du triangle. Que remarquez-vous ? Démontrez-le (Indication : Par récurrence à l'aide de la formule de Pascal).

Exercice 21 Proposer une fonction Python pour calculer les coefficients du binôme.

Formule du binôme de Newton[6]

Pour tout nombres a et b et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :

$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n$.

C'est à dire : $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Preuve :

6. Isaac Newton (4 janvier 1643 – 31 mars 1727 selon le calendrier grégorien, ou 25 décembre 1642 – 20 mars 1727 selon le calendrier julien) est un physicien, philosophe, astronome, et mathématicien anglais.

Exercice 22 :

1. Calculer $A = (1-2x)^3$, $Z = (2+i)^4$

Entraînement 10

À l'aide de la formule du binôme, déterminer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.