D.E.A. de Mathématiques Université Paris 7

# COHOMOLOGIE DE CERTAINS ESPACES CLASSIFIANTS

Mémoire présenté par Pierre Duclosson,
encadré par Pierre Vogel

1er octobre 1996

# Introduction

Les fibrés vectoriels occupent une place centrale dans la topologie algébrique. Les espaces classifiants sont des outils essentiels pour leur étude. On s'intéresse donc tout naturellement à calculer les objets algébriques qui leur sont associés, et notamment la cohomologie. Plusieurs résultats en ce sens sont facilement accessibles, mais la cohomologie de $BO_n$ à coefficients entiers ne s'exprime pas sous la forme d'une algèbre polynomiale simple ; le but principal de ce mémoire est d'en étudier la structure.

On rappelle tout d'abord les définitions des espaces étudiés et des généralités sur les classes caractéristiques. Dans un deuxième temps on démontre quelques propositions et lemmes préparatoires mais intéressants par eux-mêmes, puis on s'intéresse au calcul de $H^*(BO_n;\mathbb{Z})$.

# 1 Généralités

**Espaces $BO_n, BU_n, BSO_n$ :**

Dans la suite on désignera par $BO_n$ l'espace topologique formé par l'ensemble des sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension $n$ de $\mathbb{R}^\infty$. Cet espace est muni de la topologie limite induite par les inclusions des grassmanniennes :

$$G_{n,1} \subset G_{n,2} \subset G_{n,3} \subset G_{n,4} \ldots \subset BO_n$$

On notera généralement $\xi_n$ le fibré standard de $BO_n$.

On définit $BU_n$ de la même façon avec le corps des complexes $\mathbb{C}$. On notera $\gamma_n$ le fibré standard de $BU_n$.

$BSO_n$ est l'espace formé des sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels *orientés* de dimension $n$ de $\mathbb{R}^\infty$. Un élément de $BSO_n$ est donc un couple formé d'un espace vectoriel et d'une de ses deux orientations. On notera $\widetilde{\gamma}_n$ le fibré standard de $BSO_n$, qui est évidemment un fibré orienté.

**Fibré orienté, Classe d'Euler :**

Un fibré orienté est un $\mathbb{R}$-fibré vectoriel pour lequel une orientation de chaque fibre a été choisie et tel que ces orientations soient compatibles avec les trivialisations locales (i.e. ces trivialisations doivent être directes sur chaque fibre). Pour fixer les idées appelons $\xi$ un tel fibré, $E$ l'espace total (on désignera par $E_0$ le sous ensemble de $E$ constitué des vecteurs non nuls de $E$) , $B$ la base, $\pi$ la projection et $n$ le rang du fibré. Du point de vue de la cohomologie il existe donc pour chaque fibre $F$ une classe d'orientation $u_F \in H^n(F, F_0; A)$, où $F_0 = F \cap E_0$ et $A$ est un anneau quelconque.

On montre alors que :

**Proposition :** *$H^i(E, E_0; A) = 0$ si $i < n$ et $H^n(E, E_0; A)$ contient un unique élément $u$ tel que $u \mid_{(F,F_0)} = u_F$ pour chaque fibre. De plus $y \mapsto y \cup u$ est un isomorphisme de $H^k(E; A)$ sur $H^{k+n}(E, E_0; A)$.*

*Preuve : cf Milnor*

On peut alors définir la classe d'Euler :

**Définition :** *La classe d'Euler du fibré orienté $\xi$ est la classe de cohomologie, notée traditionnellement $e(\xi)$, qui correspond à $u_{|E}$ à travers l'isomorphisme $\pi^* : H^n(B; A) \longrightarrow H^n(E; A)$.*

On prouve alors les propriétés suivantes :

(1) Si $f : B' \longrightarrow B$ est une application continue, alors $f^*(\xi)$ reste orienté, et $e(f^*(\xi)) = f^*(e(\xi))$.

(2) Si l'orientation de $\xi$ est inversée, alors la classe d'Euler change de signe.

(3) Si la dimension de la fibre est impaire alors $2.e(\xi) = 0$.

(4) La flèche naturelle : $H^n(B; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(B; \mathbb{F}_2)$ envoie la classe d'Euler sur la dernière classe de Stiefel-Whitney.

(5) La somme de Whitney de deux fibrés orientés reste orientée, et la classe d'Euler de cette somme n'est autre que le produit des classes d'Euler.

(6) Si $\xi$ posséde une section jamais nulle, alors la classe d'Euler $e(\xi)$ du fibré orienté est nulle.

(7) Si $\xi$ est un fibré orienté, on a alors une suite exacte associée de la forme :

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H^i(B; A) \xrightarrow{.e(\xi)} H^{i+n}(B; A) \xrightarrow{\pi_0{}^*} H^{i+n}(E_0; A) \xrightarrow{\partial} H^{i+1}(B; A) \xrightarrow{.e(\xi)} \cdots$$

où $\pi_0$ n'est autre que la restriction de $\pi$ à la partie $E_0$ de $E$, on appelle cette suite la suite exacte de Gysin.

### Classe de Chern, relations avec la classe d'Euler

Il ne s'agit pas ici de donner une construction de la classe de Chern, mais plutôt de mettre l'accent sur certaines de ses propriétés.
À un $\mathbb{C}$-fibré vectoriel quelconque $\gamma$, on peut associer des classes de cohomologie de l'espace de base, (cohomologie à coefficient dans un anneau quelconque), dites classes de Chern. Elles sont indicées par les entiers naturels ; $c_i \in H^{2i}(B; A)$ . On a toujours $c_0 = 1$, et les classes d'indice strictement supérieur au rang du fibré sont nulles. La classe totale, c'est-à-dire la somme de toutes les classes est multilicative par rapport à la somme de Whitney, elle est naturelle, et ne dépend que de la classe d'isomorphie de $\gamma$.

**Propriétés :**

(1) La dernière classe de Chern d'un fibré est égale à la classe d'Euler du fibré réel déduit de ce fibré complexe, qui est un fibré canoniquement orienté.

(2) La classe de Chern du fibré conjugué est donnée par la formule : $c_i(\overline{\omega}) = (-1)^i.c_i(\omega)$.

**Complexification des fibrés réels, Classe de Pontrjagin :**

Le complexifié d'un fibré réel $\xi$ est tout simplement le fibré obtenu en donnant au fibré $\xi \oplus \xi$ une structure complexe définie par : $i.(x, y) = (-y, x)$ pour $(x, y)$ un élément de l'espace total du fibré $\xi \oplus \xi$. On note $\xi \otimes \mathbb{C}$ ce nouveau fibré. On peut alors définir la classe de Pontrjagin d'un fibré réel par : $\wp_i(\xi) = (-1)^i.c_{2i}(\xi \otimes \mathbb{C}) \in H^{4i}(B; A)$. On somme ces classes pour définir une classe de Pontrjagin totale, notée sans indice.

**Propriétés :**

(1) Le complexifié d'un fibré réel est toujours isomorphe a son conjugué.

(2) Les classes de Pontrjagin sont naturelles.

(3) Pour deux fibrés réels $\xi$ et $\eta$ on a : $2.(\wp(\xi \oplus \eta) - \wp(\xi).\wp(\eta)) = 0$.

(4) Si $\gamma$ est un fibré complexe et $\gamma_{\mathbb{R}}$ le fibré réel déduit, alors : $\gamma_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \simeq \gamma \oplus \overline{\gamma}$.

(5) Si $\xi$ est un fibré orienté de rang $2k$, alors $\wp_k(\xi) = e(\xi)^2$.

On rappelle pour finir deux résultats classiques :

$$H^*(BO_n, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[\omega_1, \cdots, \omega_n]$$

$$H^*(BU_n, A) = A[c_1, \cdots, c_n]$$

où les $\omega_i$ représentent les classes de Stiefel-Withney du fibré standard $\xi_n$ de $BO_n$, $A$ un anneau quelconque et les $c_i$ les classes de Chern du fibré standard de $BU_n$.

*Remarque :* On trouvera les preuves des propriétés énoncés dans cette première partie dans *Characteristic Classes.*

## 2 Préliminaires

**Proposition :** *$H^*(BO_n; \mathbb{Z})$ et $H_*(BO_n; \mathbb{Z})$ sont de type fini en chaque degré.*

*Preuve :*

Grâce à la suite des coefficients universels on voit facilement qu'il suffit de montrer que $H_*(BO_n; \mathbb{Z})$ est de type fini en chaque degré.

Comme $BO_n$ est muni de la topologie limite $G_{n,1} \subset G_{n,2} \subset \ldots \subset BO_n$, on a pour $k \in \mathbb{N}$ :

$$H_k(BO_n; \mathbb{Z}) = \varinjlim_{p \in \mathbb{N}} H_k(G_{n,p}; \mathbb{Z}).$$

Par compacité des grassmanniennes, les $H_k(G_{n,p}; \mathbb{Z})$ sont tous de type fini, il suffit donc de montrer qu'à partir d'un certain rang la flèche :

$$H_k(G_{n,p}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(G_{n,p+1}; \mathbb{Z}) \quad \text{est bijective.}$$

On introduit l'espace topologique :

$$Y = \{(P,y) \mid P \text{ est un s.e.v de dim n de } \mathbb{R}^{p+n+1}, y \in P^\perp, |y| = 1\} .$$

On a la fibration localement triviale : $G_{n,p} \longrightarrow Y \longrightarrow S^{p+n}$.
On en déduit la longue suite exacte de Wang :

$$\longrightarrow H_{k+1-p-n}(G_{n,p+1}) \xrightarrow{\partial} H_k(G_{n,p}) \longrightarrow H_k(Y) \longrightarrow H_{k-p-n}(G_{n,p}) \xrightarrow{\partial}$$

puis que :

$$H_k(G_{n,p};\mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(Y;\mathbb{Z}) \text{ est une bijection si } k+1-n < p.$$

On a aussi la fibration localement triviale : $S^p \longrightarrow Y \longrightarrow G_{n,p+1}$.
On en déduit la longue suite exacte de Gysin :

$$\longrightarrow H_{k-p}(G_{n,p+1}) \xrightarrow{\partial} H_k(Y) \longrightarrow H_k(G_{n,p+1}) \longrightarrow H_{k-p-1}(G_{n,p+1}) \xrightarrow{\partial}$$

Et donc

$$H_k(Y;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(G_{n,p+1};\mathbb{Z}) \text{ est une bijection si } k < p.$$

On conclut en composant les deux fléches : $G_{n,p} \longrightarrow Y \longrightarrow G_{n,p+1}$.

$\square$

*Remarque :* On démontre de la même façon que $H^*(BSO_n)$ et $H_*(BSO_n)$ sont de type fini en chaque degrés.

**Lemme :** *Soit $A$ un anneau dans lequel 2 est inversible.*
*Soient $E \xrightarrow{p} X$ un revêtement à deux feuillets et $E \xrightarrow{\tau} E$ l'automorphisme du revêtement, alors $p^* : H^*(X;A) \longrightarrow H^*(E;A)$ est injective et induit un isomorphisme de $H^*(X;A)$ sur $H^*(E;A)^\tau = \{x \in H^*(E;A) \mid \tau^*(x) = x\}$.*

*Preuve :*

Notons $\Sigma_k(X)$ l'ensemble des $k$-simplexes singuliers de $X$. Comme les simplexes standards sont tous contractiles, $\forall\, \sigma \in \Sigma_k(X),\ \ \exists\, \sigma', \sigma'' \in \Sigma_k(E)$, uniques à permutation près et vérifiant :

$$\begin{cases} \tau \circ \sigma' = \sigma'' \\ p \circ \sigma' = \sigma \\ p \circ \sigma'' = \sigma. \end{cases}$$

On définit alors une fonction $T$, dite de transfert, par :

$$\begin{array}{rccc} T : & C^k(E;A) & \longrightarrow & C^k(X;A) \\ & f & \longmapsto & g \end{array} \quad \text{où} \quad g(\sigma) = f(\sigma') + f(\sigma'').$$

On montre facilement que $T$ commute à la différentielle, on en déduit donc une flèche, notée aussi $T$, au niveau de la cohomologie, par ailleurs on voit facilement que si $g \in C^k(X;A)$, alors $T(p^*(g)) = 2g$, d'où en cohomologie : $T \circ p^* = 2$ id.

D'autre part on peut représenter un élément $[f]$ de $H^k(E;A)^\tau$ par un cocycle $g = \frac{1}{2}(f + \tau^*(f))$ invariant par $\tau^*$, or pour une telle cochaine, $p^* \circ T(g) = 2g$.

Finalement, on a deux flèches :

$$\begin{array}{rccc} T : & H^*(E;A)^\tau & \longrightarrow & H^*(X;A) \\ p^* : & H^*(X;A) & \longrightarrow & H^*(E;A)^\tau \end{array}$$

vérifiants $T \circ p^* = 2\,\mathrm{id}$ et $p^* \circ T = 2\,\mathrm{id}$, et comme 2 est inversible, ce sont des bijections.

$\square$

**Proposition :** *$H^*(BSO_n; \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right])$ est l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ engendré par les classes :*

$$\begin{array}{lll} \wp_1, \cdots, \wp_{k-1}, \wp_k & si & n = 2k+1 \\ \wp_1, \cdots, \wp_{k-1}, e & si & n = 2k \end{array}$$

*où les $\wp_i$ désignent les classes de Pontrjagin et $e$ la classe d'Euler du fibré standard (orienté) $\widetilde{\gamma}_n$ de $BSO_n$.*

*Preuve :*

On procède par récurrence :
Pour $n = 1$, $BSO_1$ a le type d'homotopie de $S^\infty$, il est donc contractile.
Pour $n = 2$, on sait qu'un espace vectoriel réel orienté de dimension 2 est muni d'une structure complexe canonique, donc $BSO_2 \simeq BU_1$ et la classe d'Euler du fibré standard de $BSO_2$ correspond à la première classe de Chern du fibré standard de $BU_1$ (cf. Généralités).

On suppose le résultat acquis pour $n-1$.
On note $A$ l'anneau $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ qui est principal, $E$ l'espace total du fibré orienté $\widetilde{\gamma}_n$, $E_0$ l'espace des vecteurs non nuls de $E$ et $\pi_0 : E_0 \longrightarrow BSO_n$ la projection canonique.
On a la suite exacte de Gysin (cf. Généralités) :

$$\xrightarrow{\partial} H^i(BSO_n;A) \xrightarrow{.e} H^{i+n}(BSO_n;A) \xrightarrow{{\pi_0}^*} H^{i+n}(E_0;A) \xrightarrow{\partial}$$

$E_0$ est l'ensemble des triplets $(V, o_V, u)$ où $V$ est un sous-espace de dimension $n$ de $\mathbb{R}^\infty$, $o_V$ une orientation de $V$ et $u$ un vecteur non nul de $V$. Or un vecteur non nul d'un espace vectoriel orienté de dimension $n$ définit en passant à l'orthogonal un espace orienté de dimension $n-1$, on a donc une application continue $\pi_1 : E_0 \longrightarrow BSO_{n-1}$. Cette application est en fait une fibration localement triviale, dont la fibre a le type d'homotopie de $S^\infty$, donc $\pi_1$ induit une bijection en cohomologie.

On montre par ailleurs que $\pi_1^*(\widetilde{\gamma}_{n-1} \oplus \varepsilon_1) = \pi_0^*(\widetilde{\gamma}_n)$, ainsi on peut remplacer dans la suite exacte longue précédente $H^*(E_0; A)$ par $H^*(BSO_{n-1}; A)$ et $\pi_0^*$ par $\phi = (\pi_1^*)^{-1} \circ \pi_0^*$ et $\phi$ fait correspondre aux classes caractéristiques (classes d'Euler et de Pontrjagin) associées au fibré $\widetilde{\gamma}_n$ des classes caractéristiques associées au fibré $\widetilde{\gamma}_{n-1} \oplus \varepsilon_1$.

Pour $n = 2k+1$ ; comme $n$ est impair et que 2 est inversible dans $A$, la classe d'Euler de $\widetilde{\gamma}_n$ est nulle (cf. Généralités). On a donc une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow H^i(BSO_{2k+1}) \xrightarrow{\phi} H^i(BSO_{2k}) \longrightarrow H^{i-2k}(BSO_{2k+1}) \longrightarrow 0$$

Par l'hypothèse de récurrence $H^*(BSO_{2k}) \simeq A[\wp_1, \cdots, \wp_{k-1}, e]$.
On a : $\phi(\wp_i) = \wp_i$ , pour $i \leq k-1$ et $\phi(\wp_k) = e^2$ (cf. Généralités).
On note $A[\wp_1, \cdots, \wp_{k-1}, e]_i$ et $A[\wp_1, \cdots, \wp_k]_i$ les sous-$A$-modules engendrés par les monômes de degré i, on définit de manière évidente :

$$\alpha_i : A[\wp_1, \cdots, \wp_k]_i \longrightarrow H^i(BSO_{2k+1})$$

Or le conoyau de la fléche injective $A[\wp_1, \cdots, \wp_k]_i \longrightarrow A[\wp_1, \cdots, \wp_{k-1}, e]_{i-2k}$ qui envoie $\wp_i$ en $\wp_i$ si $i < k$ et $\wp_k$ en $e^2$ est isomorphe à $A[\wp_1, \cdots, \wp_k]_{i-2k}$. Il existe donc une flèche

$$\beta_i : A[\wp_1, \cdots, \wp_k]_{i-2k} \longrightarrow H^{i-2k}(BSO_{2k+1})$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & H^i(BSO_{2k+1}) & \xrightarrow{\phi} & H^i(BSO_{2k}) & \longrightarrow & H^{i-2k}(BSO_{2k+1}) & \longrightarrow 0 \\
& \alpha_i \uparrow & & \wr \uparrow & & \beta_i \uparrow & \\
0 \longrightarrow & A[\wp_1, \cdot, \wp_k]_i & \longrightarrow & A[\wp_1, \cdot, \wp_{k-1}, e]_i & \longrightarrow & A[\wp_1, \cdot, \wp_k]_{i-2k} & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Par le lemme du serpent on voit que $\mathrm{Ker}(\beta_i) \simeq \mathrm{Coker}(\alpha_i)$, or $A$ est un anneau principal donc $\mathrm{Ker}(\beta_i)$ est un module libre. Ainsi pour montrer que $\mathrm{Coker}(\alpha_i) = 0$ il suffit de montrer que son rang est nul. Notons $a_i$ le rang de $H^i(BSO_{2k+1})$ et $b_i$ celui de $A[\wp_1, \cdot, \wp_k]_i$ . On voit facilement que $\alpha_i$ est injective donc : $b_i \leq a_i$ ; de même $\beta_i$ est surjective donc $a_{i-2k} \leq b_{i-2k}$ , ceci quelque soit i, donc $a_i = b_i$ . Or le rang de $\mathrm{Coker}(\alpha_i)$ est précisément $a_i - b_i = 0$. Donc $\mathrm{Coker}(\alpha_i)$ est nul, ce qui prouve que $\alpha_i$ et un un isomorphisme et par suite que $A[\wp_1, \cdot, \wp_k] \simeq H^*(BSO_{2k+1})$.

Pour $n = 2k$ grâce à l'hypothèse de récurrence on voit facilement que $\phi$ est surjective on a donc le diagramme commutatif suivant (où les flèches verticales sont canoniques) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \rightarrow & H^*(BSO_n) & \xrightarrow{.e} & H^*(BSO_n) & \rightarrow & H^*(BSO_{n-1}) & \rightarrow & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \rightarrow & A[\wp_1, \cdots, \wp_{k-1}, e] & \xrightarrow{.e} & A[\wp_1, \cdots, \wp_{k-1}, e] & \rightarrow & A[\wp_1, \cdots, \wp_{k-1}] & \rightarrow & 0
\end{array}$$

La dernière flèche verticale est une bijection par l'hypothèse de récurrence ; grâce au lemme des 5 et en utilisant la graduation des algèbres on voit que l'autre flèche verticale et une bijection, ce qui achève la preuve.

□

**Proposition :**$H^*(BO_n;\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right])$ *est l'anneau des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ *engendré par les classes de Pontrjagin* $\wp_i(\xi_n)$ *pour* $1 \leq i \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ *où* $\xi_n$ *désigne le fibré standard de* $BO_n$.

*Preuve :*
On a une flèche canonique $BSO_n \longrightarrow BO_n$, obtenue en oubliant l'orientation des espaces vectoriels, on voit facilement que c'est un revêtement à deux feuillets, or la structure de $H^*(BSO_n;\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right])$ est connue, reste donc à etudier l'action de l'automorphisme du revêtement : $BSO_n \xrightarrow{\tau} BSO_n$ . Cet automorphisme transforme le fibré $\widetilde{\gamma}_n$ en le même fibré d'orientation opposée $-\widetilde{\gamma}_n$, donc $\tau^*$ laisse les classes de Pontrjagin $\wp_i(\widetilde{\gamma}_n)$ invariantes et transforme la classe d'Euler $e(\widetilde{\gamma}_n)$ en son opposée $-e(\widetilde{\gamma}_n)$ et comme dans le cas $n$ pair $(n = 2k)$ on a : $e^2(\widetilde{\gamma}_n) = \wp_k(\widetilde{\gamma}_n)$, le résultat est ainsi acquis.

$\square$

*Remarque :* Les deux propositions précédentes se généralisent au cas d'un anneau des coeffiscients plus général ; soit $A$ un anneau commutatif, dans lequel 2 est inversible (il a donc une structure de $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$-module). On note indifféremment $X$ les espaces topologiques $BSO_n$ et $BO_n$. On sait que $H_*(X;\mathbb{Z})$ est de type fini en chaque degrés et comme $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ est un $Z$-module plat ( il est sans torsion ), la suite des coeffiscients universels montre que : $H_*(X;\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right])$ est de type fini en chaque degrés, on a donc la suite exacte suivante (cf Spanier ; chap. 5, sec. 5, §10) :

$$0 \longrightarrow H^n(X,\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{2}\right]) \otimes A \longrightarrow H^n(X,A) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H^{n+1}(X,\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{2}\right]);A) \longrightarrow 0$$

d'où $H^*(X,\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]) \otimes A \simeq H^*(X,A)$ , qui mène immédiatement au résultat.

## 3 Cohomologie du classifiant

Soit $X$ un espace topologique (supposé connexe par arcs) ; de la suite exacte $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{F}_2 \longrightarrow 0$, on déduit une suite exacte courte de modules différentiels gradués :

$$0 \longrightarrow C^*(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 2} C^*(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow C^*(X;\mathbb{F}_2) \longrightarrow 0$$

On a alors une suite exacte longue :

$$\xrightarrow{\beta} H^k(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 2} H^k(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} H^k(X;\mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta} H^{k+1}(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow$$

où $\alpha$ est l'homomorphisme de réduction modulo 2.

**Définition :** *$\beta$ est appelé homomorphisme de Bockstein. Noter que l'on peut aussi mettre la suite longue sous la forme d'un couple exact :*

$$\begin{array}{ccc} H^*(X;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\times 2} & H^*(X;\mathbb{Z}) \\ \beta \nwarrow & & \swarrow \alpha \\ & H^*(X;\mathbb{F}_2) & \end{array}$$

*appelé couple exact de Bockstein.*

On note $\alpha \circ \beta = Sq^1$, c'est le premier carré de Steenrod. Cet homomorphisme possède les propriétés suivantes :

**Lemme 1 :**

| | | |
|---|---|---|
| *(i)* | *Pour tout x,y* $\in H^*(X;\mathbb{F}_2)$ | $Sq^1(x.y) = Sq^1(x).y + x.Sq^1(y)$ |
| *(ii)* | *si* $x \in H^0(X;\mathbb{F}_2)$ | $Sq^1(x) = 0$ |
| *(iii)* | *si* $x \in H^1(X;\mathbb{F}_2)$ | $Sq^1(x) = x^2$ |

*Preuve :*

$\beta$ est l'homomorphisme de connexion déduit de la suite exacte de modules différentiels gradués :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^*(X;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\times 2} & C^*(X;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\alpha} & C^*(X;\mathbb{F}_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & d\downarrow & & d\downarrow & & d\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C^{*+1}(X;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\times 2} & C^{*+1}(X;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\alpha} & C^{*+1}(X;\mathbb{F}_2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Soients : $\begin{array}{lll} x = [\omega_1] & \omega_1 \in C^p(X;\mathbb{F}_2) & d\omega_1 = 0 \\ y = [\omega_2] & \omega_2 \in C^q(X;\mathbb{F}_2) & d\omega_2 = 0 \end{array}.$

Il existe $\sigma_1, \sigma_2$ tels que $\alpha(\sigma_1) = \omega_1$ et $\alpha(\sigma_2) = \omega_2$, d'où $\beta(x) = [\frac{d\sigma_1}{2}], \beta(y) = [\frac{d\sigma_2}{2}]$, on voit de la même façon que :

$$\beta(x.y) = \left[\frac{d\sigma_1}{2}.\sigma_2 + (-1)^p \sigma_1.\frac{d\sigma_2}{2}\right]$$

En composant par $\alpha$ cette égalité, on obtient $Sq^1(x.y) = Sq^1(x).y + x.Sq^1(y)$.

$X$ est connexe par arcs, donc $1 \in H^0(X;\mathbb{F}_2)$ est générateur de $H^0(X;\mathbb{F}_2)$ or d'aprés l'égalité ci-dessus $Sq^1(1) = 2.Sq^1(1) = 0$.

Soit $x \in H^1(X;\mathbb{F}_2)$, $x = [c]$ , $dc = 0$, il existe $\widetilde{c} \in C^1(X;\mathbb{Z})$ tel que $\alpha(\widetilde{c}) = c$. Pour définir $\widetilde{c}$, on prend le relevé évident correspondant à : $0 \longmapsto [0]$, $1 \longmapsto [1]$. Si $\sigma$ est une 2-chaine on note $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ les 1-chaines déduites, d'où :

$$\alpha \circ \beta(x) = [\alpha(\frac{d\widetilde{c}}{2})] \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{llll} d\widetilde{c}: & \Sigma_2(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \sigma & \longmapsto & \widetilde{c}(\sigma_0) - \widetilde{c}(\sigma_1) + \widetilde{c}(\sigma_2) \end{array} \right.$$

d'autre part $x^2 = [c^2]$, où :

$$\begin{cases} c^2 : & \Sigma_2(X) & \longrightarrow & \mathbb{F}_2 \\ & \sigma & \longmapsto & c(\sigma_0) + c(\sigma_2) \end{cases}$$

En tenant compte de la condition $dc = 0$, on calcule les valeurs des cochaines $c^2$ et $\alpha(\widetilde{\frac{dc}{2}})$ en fonctions des valeurs de $c(\sigma_0), c(\sigma_1), c(\sigma_2)$. On obtient : $\alpha(\widetilde{\frac{dc}{2}}) = c^2$. D'où $\alpha \circ \beta(x) = x^2$.

$\square$

*Remarque :* La propriété (i) a notemment pour conséquence : $Sq^1(x^2) = 0$ quelque soit $x$ dans $H^*(X; \mathbb{F}_2)$.

**Lemme 2 :** *Soit $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ les classes de Stiefel-Whitney du fibré standard $\xi_n$ de $BO_n$, $\omega_i \in H^*(BO_n; \mathbb{F}_2)$.*
*Alors on a : $Sq^1(\omega_i) = \omega_1.\omega_{i+1} \ + \ (i+1)\omega_{i+1}$ avec la convention $\omega_{n+1} = 0$.*

*Preuve :*
Pour effectuer le calcul on plonge $H^*(BO_n; \mathbb{F}_2)$ dans $H^*(BO_1 \times \cdots \times BO_1; \mathbb{F}_2)$, l'espace $BO_1$ étant représenté $n$ fois dans le produit $BO_1 \times \cdots \times BO_1$. On connaît bien la structure de $H^*(BO_1; \mathbb{F}_2)$ ; grâce au théorème de Künneth sur la cohomologie du produit de deux espaces, on conclut facilement que :

$$H^*(BO_1 \times \cdots \times BO_1; \mathbb{F}_2) \simeq \mathbb{F}_2[x_1, \cdots, x_n]$$

où $x_i$ est la classe de Stiefel-Whitney du fibré vectoriel $\lambda_i$, image réciproque par la i-ème projection, $p_i : \ BO_1 \times \cdots \times BO_1 \longrightarrow BO_1$ , du fibré $\xi_1$.
De l'application $\mathbb{R}^\infty \times \cdots \times \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ obtenue en regroupant les coefficients de n vecteurs pour former un seul nouveau vecteur, on déduit :

$$\begin{array}{llll} \phi : & BO_1 \times \cdots \times BO_1 & \longrightarrow & BO_n \\ & (D_1, \cdots, D_n) & \longmapsto & D_1 \oplus \cdots \oplus D_n \end{array}$$

Il est clair que $\phi^*$ commute avec $Sq^1$, et on voit que $\phi^*(\xi_n) \simeq \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n$.
Donc : $\phi^*(1 + \omega_1 + \cdots + \omega_n) = (1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n)$
et $\phi^*(\omega_i) = \sigma_i(x_1, \cdots, x_n)$ où $\sigma_i$ est le i-ème polynôme symétrique élémentaire, or les polynômes symétriques élémentaires sont algébriquement indépendants donc $\phi^*$ est injective. Dans la suite on calcule en considérant que $\phi^*$ est une inclusion :

$$\omega_i = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_i \leq n} x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_i}$$

$$Sq^1(\omega_i) = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_i \leq n} x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_i}.(x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_i})$$

$$Sq^1(\omega_i) = \omega_i.\omega_1 - \sum_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\nu)\in E} x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_i}.x_\nu$$

L'ensemble $E$ est défini par :

$$E = \{(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\nu) \mid 1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_i \leq n, \quad \nu \neq \alpha_1,\cdots,\alpha_i\}.$$

On est alors amené à définir l'ensemble $F$ par :

$$F = \{(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i+1},j) \mid 1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_{i+1} \leq n, \quad 1 \leq j \leq i+1\}.$$

De plus on a une bijection :

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ (\alpha_1,\cdot,\overset{\wedge}{\alpha_j},\cdot,\alpha_{i+1}) & \longmapsto & (\alpha_1,\cdots,\alpha_i) \\ \alpha_j & \longmapsto & \nu \end{array}$$

On a donc : $Sq^1(\omega_i) = \omega_i.\omega_1 - (i+1)\omega_{i+1}$, dans le cas $i < n$ et $Sq^1(\omega_n) = \omega_n.\omega_1$

$\square$

On note $D^*$ l'algèbre graduée $H^*(BO_n;\mathbb{Z})$, $E^* = H^*(BO_n;\mathbb{F}_2)$ et $D \xrightarrow{\mu} D$ le morphisme de multiplication par 2, ainsi le couple exact de Bockstein devient :

$$\begin{array}{ccc} D^* & \xrightarrow{\mu} & D^* \\ \beta \nwarrow & & \swarrow \alpha \\ & E^* & \end{array}$$

On note naturellement le couple dérivé de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} D'^* & \xrightarrow{\mu'} & D'^* \\ \beta' \nwarrow & & \swarrow \alpha' \\ & E'^* & \end{array}$$

Les résultats suivants portent sur le calcul de ce couple dérivé :

**Lemme 3 :**

*Si* $n = 1$ *alors* $E'^* = \mathbb{F}_2$.

*Si* $n > 1$ *alors* $E'^* = \mathbb{F}_2[\widetilde{\omega_2^2},\cdots,\widetilde{\omega_{2k}^2}]$ *où* $k = [\frac{n}{2}]$ *et les* $\widetilde{\omega_{2p}^2}$ *sont les classes dans* $E'^*$ *des éléments* $\omega_{2p}^2$ *de* $E^*$.

*Preuve :*

On sait que $E'^*$ est la cohomologie de l'algèbre différentielle graduée $(E^*, Sq^1)$. Or $E^* \simeq \mathbb{F}_2[\omega_1,\cdots,\omega_n]$. On distingue deux cas suivant la parité de $n$.

Si $n = 2k$

On ajuste les variables : $\mathbb{F}_2[\omega_1,\cdots,\omega_n] \simeq \mathbb{F}_2[\omega_1,\omega_2,\omega_3'\cdots,\omega_{n-1}',\omega_n]$, avec

$\omega_{2p+1}' = Sq^1(\omega_{2p}) = \omega_1.\omega_{2p} + \omega_{2p+1}$ pour $3 \leq 2p+1 \leq n$.

On décompose ensuite :

$\mathbb{F}_2[\omega_1,\omega_2,\omega_3'\cdots,\omega_{n-1}',\omega_n] = \mathbb{F}_2[\omega_1,\omega_{2k}] \otimes \mathbb{F}_2[\omega_2,\omega_3'] \otimes \cdots \otimes \mathbb{F}_2[\omega_{2k-2},\omega_{2k-1}']$.

Comme l'anneau de base est un corps, il suffit de calculer l'homologie de chacun des termes de ce produit. On voit facilement que :

$$H^*(\mathbb{F}_2[\omega_1, \omega_{2k}]; Sq^1) \simeq \mathbb{F}_2[\widetilde{\omega_{2k}^2}] \quad \text{où } \widetilde{\omega_{2k}^2} \text{ représente la classe de } \omega_{2k}^2,$$

$$H^*(\mathbb{F}_2[\omega_{2p}, \omega'_{2p+1}]; Sq^1) \simeq \mathbb{F}_2[\widetilde{\omega_{2p}^2}] \quad \text{où } \widetilde{\omega_{2p}^2} \text{ représente la classe de } \omega_{2p}^2.$$

Donc finalement on a : $E' \simeq \mathbb{F}_2[\widetilde{\omega_2^2}, \cdots, \widetilde{\omega_{2k}^2}]$.

Si $n = 2k+1$

$\mathbb{F}_2[\omega_1, \cdots, \omega_n] \simeq \mathbb{F}_2[\omega_1, \omega_2, \omega'_3 \cdots, \omega_{2k}, \omega'_{2k+1}]$, avec

$\omega'_{2p+1} = Sq^1(\omega_{2p}) = \omega_1.\omega_{2p} + \omega_{2p+1}$ pour $3 \leq 2p+1 \leq 2k+1$.

On décompose à nouveau en produit tensoriel :

$\mathbb{F}_2[\omega_1, \omega_2, \omega'_3 \cdots, \omega_{2k}, \omega'_{2k+1}] = \mathbb{F}_2[\omega_1] \otimes \mathbb{F}_2[\omega_2, \omega'_3] \otimes \cdots \otimes \mathbb{F}_2[\omega_{2k}, \omega'_{2k+1}]$.

On montre facilement que : $H^*(\mathbb{F}_2[\omega_1]; Sq^1) \simeq \mathbb{F}_2$.

La cohomologie des autres facteurs ayant déja été calculée, on obtient :

$$\begin{array}{lll} \text{si} & n = 1 & E' = \mathbb{F}_2 \\ \text{si} & n \geq 3 & E' = \mathbb{F}_2[\widetilde{\omega_2^2}, \cdots, \widetilde{\omega_{2k}^2}]. \end{array}$$

□

*Remarque :* On note que dans tout les cas : $i \not\equiv 0\ [4] \implies E'^i = 0$.

**Lemme 4 :** *L'homomorphisme $\mu'$ est injectif (c'est à dire $\beta' = 0$).*

*Preuve :*

On a la suite exacte :

$$\longrightarrow E'^{i-1} \xrightarrow{\beta'} D'^i \xrightarrow{\mu'} D'^i \xrightarrow{\alpha'} E'^i \longrightarrow$$

Un seul cas non trivial : celui où $E'^{i-1} \neq 0$, mais alors $E'^i = 0$ donc $\mu'$ est surjective. Or $D'^i$ est clairement un $\mathbb{Z}$-module de type fini, donc il se décompose en une partie libre et une partie de torsion. Or $\mu'$ n'est autre que la multiplication par 2, donc il est toujours injectif sur la partie libre, et sur la partie de torsion, comme il est surjectif, il doit aussi être injectif.

□

**Lemme 5 :** *$D'^*$ est libre, concentré en degrés multiples de 4.*

*Preuve :*

Comme $\mathbb{Z}\,[\frac{1}{2}]$ est un $\mathbb{Z}$-module plat (il est sans torsion), on a par la suite exacte des coefficients universels :

$$(*) \quad H_*(BO_n; \mathbb{Z}\,[\tfrac{1}{2}]) \simeq H_*(BO_n; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}\,[\tfrac{1}{2}].$$

Donc $H_*(BO_n;\mathbb{Z}\,[\frac{1}{2}])$ est de type fini en chaque degré.

On connaît la structure de $H^*(BO_n;\mathbb{Z}\,[\frac{1}{2}])$, il est notamment libre et de type fini en chaque degré. $\mathbb{Z}\,[\frac{1}{2}]$ est un anneau principal, donc par la suite des coefficients universels :

$$H^i(BO_n;\mathbb{Z}\,[\tfrac{1}{2}]) \simeq \mathrm{Ext}(H_{i-1}(BO_n;\mathbb{Z}\,[\tfrac{1}{2}]);\mathbb{Z}\,[\tfrac{1}{2}]) \oplus \mathrm{Hom}(H_i(BO_n;\mathbb{Z}\,[\tfrac{1}{2}]);\mathbb{Z}\,[\tfrac{1}{2}]).$$

Dans cette écriture on voit que $H_{i-1}(BO_n;\mathbb{Z}\,[\frac{1}{2}])$ ne peut pas posséder de partie de torsion car sinon $H^i(BO_n;\mathbb{Z}\,[\frac{1}{2}])$ en aurait aussi une. (qui apparaitrait dans le terme en Ext)
Donc $H_*(BO_n;\mathbb{Z}\,[\frac{1}{2}])$ est libre de type fini en chaque degré.
Or en examinant l'action du foncteur $-\otimes\mathbb{Z}\,[\frac{1}{2}]$ sur les $\mathbb{Z}$-modules de type fini on voit qu'il ne "tue" que les 2-groupes.
Donc grâce à $(*)$, $H_*(BO_n;\mathbb{Z}) = L \oplus G$ où $L$ est libre et $G$ un 2-groupe. En appliquant la suite des coefficients universels, on montre que $H^*(BO_n;\mathbb{Z})$ possède une décomposition identique.
Or $D'^i$ n'est autre que le quotient de $H^i(BO_n;\mathbb{Z})$ par ses éléments d'ordre 2. Donc $D'$ est lui aussi somme d'une partie libre et d'un 2-groupe.
Or $D' \xrightarrow{\times 2} D'$ est injective ce qui prouve que le 2-groupe est nul. $D'$ est libre, concentré en degrés multiples de 4 (en degrés autres $2.id : D'^i \longrightarrow D'^i$ est bijective ce qui impose $D'^i = 0$ ).

$\square$

**Lemme 6 :** *$D'^* = \mathbb{Z}[\wp'_1,\cdots,\wp'_k]$ où les $\wp'_j$ sont les images dans $D'^*$ des classes de Pontrjagin et $k = [\frac{n}{2}]$.*

*Preuve :*

On raisonne degrés par degrés : il suffit de montrer que quelque soit $i$ entier, les monômes de degrés $i$ en les $\wp'_j$ forment une base du $\mathbb{Z}$-module libre $D'^i$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} D^i \arrow[rr] \arrow[dr] & & D'^i \arrow[r, "\alpha'^i"] \arrow[dl, "\phi"] & E'^i \\ & H^i(BO_n;\mathbb{Z}\,[\frac{1}{2}]) & & \end{tikzcd}$$

En effet un élément de $D^i$ d'ordre 2 est nul dans $H^i(BO_n,\mathbb{Z}\,[\frac{1}{2}])$ d'où l'existence de $\phi$. On note $\wp_j$ les classes de Pontrjagin du fibré standard de $BO_n$ et $\widehat{\wp}_j$ leurs images dans $H^*(BO_n;\mathbb{Z}\,[\frac{1}{2}])$, on note aussi $\wp'_j$ les éléments correspondants dans $D'$. D'autre part, on montre sans mal que $\alpha(\wp_j) = \omega_{2j}^2(\xi_n)$ donc $\alpha'(\wp'_j) = \widetilde{\omega_{2j}^2}$. Soit $r$ le nombre de monômes de degrés $i$ en les $k$ variables de degrés $4, 8, \ldots, 4k$ et $m_1, m_2, \cdots, m_r$ ces monômes.

On note que vu les structures de $H^*(BO_n, \mathbb{Z}\,[\frac{1}{2}])$ et de $E'^*$, on a les égalités : $r = \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}\,[\frac{1}{2}]}(H^i(BO_n, \mathbb{Z}\,[\frac{1}{2}])) = \dim_{\mathbb{F}_2}(E'^i)$. De plus, $D'^i$ est libre de type fini et on a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow D'^i \xrightarrow{\times 2} D'^i \longrightarrow E'^i \longrightarrow 0$$

donc $\mathrm{rang}_{\mathbb{Z}}(D'^i) = \dim_{\mathbb{F}_2}(E'^i) = r$. Soit $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ une base de $D'^i$, alors il existe une matrice $P$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que :

$$\begin{pmatrix} m_1(\wp_1, \cdots, \wp_k) \\ \vdots \\ m_r(\wp_1, \cdots, \wp_k) \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_r \end{pmatrix}$$

En composant cette égalité par $\phi$, on voit que $\det(P) \in \mathbb{Z}\,[\frac{1}{2}]^*$.
Puis, en composant par $\alpha'$ ; $\det(P) \equiv 0\ [2]$. Donc $\det(P) = \pm 1$. Ce qui achève la preuve.

$\square$

**Proposition :** *Les classes de Pontrjagin* $\wp_1(\xi_n), \cdots, \wp_k(\xi_n)$ *(où* $k = [\frac{n}{2}]$*) sont algébriquement indépendantes et le* $\mathbb{Z}$*-module* $H^*(BO_n; \mathbb{Z})$ *est somme directe de* $L = \mathbb{Z}[\wp_1(\xi_n), \cdots, \wp_k(\xi_n)]$ *et de* $T$ *l'ensemble des ses éléments d'ordre 2 , de plus* $T \simeq E/\mathrm{Ker}(Sq^1)$*, plus précisément,* $T = \mathrm{Im}(\beta)$ *et* $\mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Ker}(Sq^1)$.

*Preuve :*

Du lemme précédent on déduit facilement que les classes de Pontrjagin sont indépendantes. Or, on a la suite exacte courte : $0 \longrightarrow T \longrightarrow D \longrightarrow D' \longrightarrow 0$ mais $D'$ est libre donc cette suite est scindée, et par suite : $D = T \oplus \mathbb{Z}[\wp_1, \cdots, \wp_k]$. De la suite exacte :

$$L \oplus T \xrightarrow{\times 2} L \oplus T \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} L \oplus T \xrightarrow{\times 2} L \oplus T$$

On déduit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow L/2L \oplus T \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} T \longrightarrow 0$$

Or $\mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Ker}(Sq^1)$, donc $T \simeq E/\mathrm{Ker}(Sq^1)$.

$\square$

*Remarque :* Pour calculer un produit dans $H^*(BO_n, \mathbb{Z})$, il suffit de savoir faire le produit de deux éléments de $T$ ou d'un élément de $T$ et d'un élément de $L$. Soit $x_1, x_2$ deux tels éléments, $x_1.x_2$ est dans $T$, c'est à dire dans $\mathrm{Im}(\beta)$, donc il existe un $y$ dans $E$ tel que $\alpha(x_1 \cdot x_2) = Sq^1(y)$, mais comme on sait que $\alpha(\wp_j) = \omega_{2j}^2$ et que l'on connait $Sq^1$, on calcule facilemment $\alpha(x_1)$ et $\alpha(x_2)$, reste alors à déterminer $y$, puis on voit facilement que $x_1 \cdot x_2 = \beta(y)$.

## Bibliographie


Brayton Gray, *Homotopy Theory, An Introduction to Algebraic Topology*, Academic Press, 1975.

M. J. Greenberg *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin, New York, 1967.

Dale Husemoller, *Fibre Bundles*, McGraw-Hill, 1966.

John W. Milnor, James D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1974.

Robert E. Stong, *Notes on Cobordism Theory*, Mathematical Notes, Princeton University Press, 1968.

Edwin H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.