Sujet 1

Exercice 1 : Question de cours

Donner l'énoncé précis du théorème de convergence dominée.

Exercice 2

On considère : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

En étudiant les éléments propres de A, montrer que A est semblable à une matrice diagonale.

Exercice 3

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie vérifiant :

$$fg - gf = f$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $f^k g - g f^k = k f^k$
2. En déduire que f est nilpotent.

Sujet 2

Exercice 1 : Question de cours

Énoncer une CNS portant sur les sous-espaces propres pour que $f \in \mathcal{L}(E)$ soit diagonalisable.

Démontrer ensuite cette propriété.

Exercice 2

On considère une matrice A de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une CNS sur a, b, c pour que A soit diagonalisable.

Exercice 3

On suppose qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie :

$$A^3 = 3A + 3I_n$$

Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 4

Soient $J = \dfrac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J \\ \hline J & 0 \end{array}\right)$

1. Calculer A^2 puis A^3.
2. Montrer que A est diagonalisable.

Sujet 3

Exercice 1 : Question de cours

Énoncer une CNS portant sur le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres pour que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit diagonalisable.

Démontrer ensuite cette propriété.

Exercice 2

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A est-elle diagonalisable ?
2. Et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 3

Soit A une matrice carré de taille n vérifiant $\mathrm{rg}(A) = 1$ et $A^2 \neq 0$.

Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 4

On donne $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
3. En déduire A^n.