Sujet 1

Exercice 1 : Question de cours

On suppose que deux matrices A et B sont semblables.

Que dire de leur polynôme caractéristique, de leur spectre et des dimensions de leurs sous-espaces propres ?

Démontrez-le.

Exercice 2

On considère : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

En étudiant les éléments propres de A, montrer que A est semblable à une matrice diagonale.

Exercice 3

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\text{Montrer que } \mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA).$$

Sujet 2

Exercice 1 : Question de cours

Énoncer une CNS portant sur les sous-espaces propres et leur dimension pour que $f \in \mathcal{L}(E)$ soit diagonalisable.

Démontrer ensuite cette propriété.

Exercice 2

On considère une matrice A de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une CNS sur a, b, c pour que A soit diagonalisable.

Exercice 3

Soient $J = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J \\ \hline J & 0 \end{array}\right)$

1. Calculer A^2 puis A^3.
2. Montrer que A est diagonalisable.

Sujet 3

Exercice 1 : Question de cours

Énoncer une CNS portant sur le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres pour que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit diagonalisable.
Démontrer ensuite cette propriété.

Exercice 2

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A est-elle diagonalisable ?
2. Et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 3

Pour $n \geqslant 2$, déterminer les valeurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Exercice 4

Soit A une matrice carré de taille n vérifiant $\mathrm{rg}(A) = 1$ et $A^2 \neq 0$.

Montrer que A est diagonalisable.