Sujet 1

Exercice 1 : Question de cours

Produit de Cauchy

Exercice 2

Déterminer la nature de la série :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n}$$

Exercice 3

1. Pour $\alpha > 0$, justifier la convergence de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k+\alpha}$.
2. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x$

Sujet 2

Exercice 1 : Question de cours

Théorème des séries alternées.

Exercice 2

Déterminer la nature de la série :

$$\sum_{n\geqslant 1} \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$$

Exercice 3

1. On définit (u_n) par : $u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 1/n^2 & \text{sinon} \end{cases}$
   (a) Montrer que $\sum u_n$ converge.
   (b) Justifier que u_n n'est pas négligeable devant $1/n$.
2. Soit (u_n) une suite à termes positifs **et décroissante**. On suppose que $\sum u_n$ converge et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$
   (a) Déterminer la limite de $S_{2n} - S_n$.
   (b) En déduire que $2nu_{2n}$ converge vers 0.
   (c) En déduire que u_n est négligeable devant $1/n$.
3. Que retenez-vous de l'exercice ?

Sujet 3

Exercice 1 : Question de cours

Règle de d'Alembert.

Exercice 2

Soit $x \in]0, \pi/2[$. Justifier la convergence puis calculer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Indication : Pour le calcul, on pourra utiliser la formule pour $\sin(2a)$

Exercice 3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'à partir d'un certain rang on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

   Montrer que $u_n = O(v_n)$.

2. On suppose que $\displaystyle\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha > 1$.

   Montrer que $\sum u_n$ converge.

   On pourra comparer avec une série de Riemann judicieusement choisie.