Sujet 1

Exercice 1 : Question de cours

Inégalité de Cauchy-Schwarz sur un intervalle quelconque.

Exercice 2

Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan t)^\alpha \mathrm{d}t$ converge.

Exercice 3

a. Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\mathrm{d}t$

b. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{x}\mathrm{d}x$

c. En déduire que $I = \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x$ puis la valeur de I.

Sujet 2

Exercice 1 : Question de cours

Donner un énoncé précis pour le terme général des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Exercice 2

Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ converge.

Exercice 3

Déterminer la nature et calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} \mathrm{d}x$$

Sujet 3

Exercice 1 : Question de cours

Convergence et absolue convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, existence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.

Exercice 3

1. Justifier les existences et montrer l'égalité :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}$$
2. En déduire la valeur commune de ces intégrales.