Sujet 1

Exercice 1 : Question de cours

Soient $u, v \in L(E)$. On suppose que u et v commutent.
Que dire de $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E)$ par rapport à v ?

Démontrez-le.

Exercice 2

Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan t)^\alpha \mathrm{d}t$ converge.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension $2n$. Soit f un endomorphisme de rang n vérifiant $f \circ f = 0$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$

Sujet 2

Exercice 1 : Question de cours

Déterminant de Van der Monde : énoncé et preuve.

Exercice 2

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} \mathrm{d}t$.

   Indication : Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$ *tel que :* $\dfrac{\sin t}{t^2} = \dfrac{1}{t} + f(t)$

2. Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} \mathrm{d}t$

3. Linéariser $\sin^3 t$ et en déduire la valeur de I.

Exercice 3

Pour A et B deux matrices carrées de taille n, on définit M par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

Montrer que $\det(M) = \det(A + B)\det(A - B)$.

Sujet 3

Exercice 1 : Question de cours

Convergence et absolue convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

Exercice 2

On considère des réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Calculer :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}$$

Indication :
Utiliser le polynôme $P(X) = (X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_n)$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, existence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.