Sujet 1

Exercice 1 : Question de cours

Soient $u, v \in L(E)$. On suppose que u et v commutent.
Que dire de $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E)$ par rapport à v ?

Démontrez-le.

Exercice 2

Calculer le déterminant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x + a_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension $2n$. Soit f un endomorphisme de rang n vérifiant $f \circ f = 0$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$

Sujet 2

Exercice 1 : Question de cours

Déterminant de Van der Monde : énoncé et preuve.

Exercice 2

1) Pour deux matrices A et B, montrer l'équivalence de :

i.) A et B sont semblables
ii.) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$ sont semblables.

2) Les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

Exercice 3

Pour A et B deux matrices carrées de taille n, on définit M par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

Montrer que $\det(M) = \det(A+B)\det(A-B)$.

Sujet 3

Exercice 1 : Question de cours

Prouver que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Que dire de la trace, du déterminant et du rang de deux matrices semblables ?

Exercice 2

On considère des réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Calculer :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}$$

Indication :
Utiliser le polynôme $P(X) = (X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_n)$.

Exercice 3

A et B sont deux matrices carrés réelles de taille n.

Montrer que si elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors elles le sont aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.