Sujet 1

Exercice 1 : Question de cours

Soit $u \in L(E)$. On suppose que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u.

Que dire des sous-espaces $\ker(u - \lambda_k Id_E)$?

Démontrez-le.

Exercice 2

Calculer le déterminant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x+a_1 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_2 & x & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

Exercice 3

On considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!], \quad P(k) = \frac{1}{k}.$$

Déterminer $P(n+2)$.

Indication : On pourra utiliser le polynôme $Q(X) = XP(X) - 1$.

Sujet 2

Exercice 1 : Question de cours

Déterminant de Van der Monde : énoncé et preuve

Exercice 2

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sont-elles semblables ?

Exercice 3

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E. On suppose que $f + g = Id_E$ et que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim(E)$.

Montrer que f et g sont des projecteurs complémentaires.

Exercice 4

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$.

Sujet 3

Exercice 1 : Question de cours

Prouver que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Que dire de la trace, du déterminant et du rang de deux matrices semblables ?

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel et E_1, E_2 des sous-espaces vérifiant :

$$E = E_1 \oplus E_2$$

On pose : $L_1 = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}(u) \subset E_1\}$

et $L_2 = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}(u) \subset E_2\}$

1. Montrer que L_1 et L_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que $\mathcal{L}(E) = L_1 \oplus L_2$

Exercice 3

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.

On suppose que :

$$\forall x \in [a, b],\ g'(x) \neq 0$$

a) Montrer que $g(a) \neq g(b)$.

b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$