Sujet 1

Exercice 1 : Question de cours

Lemme d'Abel avec sa preuve.

Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.
On définit la suite de fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$$

1. Étudier la convergence simple.
2. Pour quelles valeurs de α la convergence est-elle uniforme ?

Exercice 3

Montrer en justifiant l'existence de tous les éléments :

$$\lim_{n \to +\infty} n \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n} \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x.$$

Sujet 2

Exercice 1 : Question de cours

Série entière : Convergence absolue à l'intérieur du disque de convergence ($|z| < R$), divergence grossière à l'extérieur ($|z| > R$).

Exercice 2

Étudier la convergence simple puis uniforme sur $[0, +\infty[$ de la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x)^n}$$

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $[0, 1]$ par : $u_n(0) = 0$ et $u_n(x) = (-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln(x)$ pour $x \in]0, 1]$.

1. Déterminer la somme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$.
2. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0, 1]$.
3. En déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

Sujet 3

Exercice 1 : Question de cours

Donner un énoncé précis pour le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.

Exercice 2

Étudier l'existence et déterminer la limite de
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n\cos t}{1+n^2t^2}\mathrm{d}t.$$

Exercice 3

On considère la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par :
$$u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,
$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$
2. En déduire que la suite (u_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction u.
3. Montrer que u est dérivable et vérifie l'équation fonctionnelle :
$$u'(x) = u(x-x^2)$$