Sujet 1

Exercice 1 : Question de cours

Donner l'énoncé précis du théorème de convergence dominée.

Exercice 2

On considère : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

En étudiant les éléments propres de A, montrer que A est semblable à une matrice diagonale.

Exercice 3

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie vérifiant :

$$fg - gf = f$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $f^k g - g f^k = k f^k$
2. En déduire que f est nilpotent.

Exercice 4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.

On définit la suite de fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$$

1. Étudier la convergence simple.
2. Pour quels valeurs de α la convergence est-elle uniforme ?

Sujet 2

Exercice 1 : Question de cours

Définir la convergence simple et la convergence uniforme.

Laquelle implique l'autre ?

Donner un contre-exemple pour l'implication qui n'a pas lieu.

Exercice 2

On considère une matrice A de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une CNS sur a, b, c pour que A soit diagonalisable.

Exercice 3

On suppose qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie :

$$A^3 + A^2 + A + I_n = 0$$

Montrer que $\mathrm{tr}(A)$ est un entier négatif ou nul.

Exercice 4

Étudier la convergence simple puis uniforme sur $[0, +\infty[$ de la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x)^n}$$

Sujet 3

Exercice 1 : Question de cours

Donner un énoncé précis sur la régularité de la limite d'une suite de fonction C^1 et d'une suite de fonction C^k.

Exercice 2

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A est-elle diagonalisable ?
2. Et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 3

Étudier la convergence simple puis uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \sin^n(x)\cos(x)$$

Exercice 4

On donne $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
3. En déduire A^n.