Sujet 1

Exercice 1 : Question de cours

Définir $\mathbb{D}$, l'ensemble des décimaux.

Montrer que c'est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Déterminer le groupe de ses inversibles.

Exercice 2

Soit A un anneau et $a, b \in A$.

On suppose que ab est nilpotent : $(ab)^n = 0$.

1. Montrer que $1 - ab$ est inversible et déterminer une expression de $c = (1 - ab)^{-1}$ à l'aide de ab.
2. Justifier que ba est nilpotent. Que peut-on en déduire pour $1 - ba$?
3. Obtenir une expression de $d = (1 - ba)^{-1}$ en fonction de a, b et c.
4. On abandonne l'hypothèse que ab est nilpotent mais on suppose que $1 - ab$ est inversible.

   Montrer que $1 - ba$ est aussi inversible.

Exercice 3

Montrer que tout idéal de $\mathbb{D}$ est principal.

Sujet 2

Exercice 1 : Question de cours

Déterminer l'ensemble des endomorphismes d'anneau de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

Exercice 2

Soit K un corps fini commutatif.

$$\text{Calculer } \prod_{x \in K^\star} x$$

Exercice 3

Soit A un anneau intégre.

On dit que A est euclidien lorsqu'il existe $\varphi : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ telle que :
pour tout $a \in A$ et $b \in A \setminus \{0\}$, il existe $(q, r) \in A^2$ vérifiant

$$a = bq + r \text{ et } r = 0 \text{ ou } \varphi(r) < \varphi(b)$$

Montrer que dans un anneau euclidien, tous les idéaux sont principaux.

Sujet 3

Exercice 1 : Question de cours

Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous anneau de $\mathbb{C}$.

Quels sont ses inversibles ?

Exercice 2

Soit A un anneau commutatif.

On note N l'ensemble des éléments nilpotents de A.

Montrer que N est un idéal de A. On l'appelle le nilradical de A.

Exercice 3

Soit A un anneau intègre. On suppose qu'il ne possède qu'un nombre fini d'ideéaux.

Montrer que A est un corps.