Sujet 1

Exercice 1 : Question de cours

Donner la forme des sous-groupes de $\mathbb{Z}$.
Démontrer ensuite ce résultat.

Exercice 2

Soit G un groupe fini et A, B deux parties de G.
On suppose que :

$$\mid A \mid + \mid B \mid > \mid G \mid$$

Montrer que $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\} \ = \ G$

Exercice 3

Montrer qu'il n'existe pas d'application $\varphi : \mathbb{U}_5 \to \mathbb{U}_5$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{U}_5,\ \varphi \circ \varphi(z) = z^2$$

Sujet 2

Exercice 1 : Question de cours

Isomorphisme entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{U}_n$.
Preuve.

Exercice 2

Soit G un groupe fini d'ordre impair.
Montrer que $f : G \to G$ définie par $f(x) = x^2$ est une application bijective.

Exercice 3

Soit G un groupe abélien fini d'ordre ab où a et b sont deux nombres premiers entre eux.

1. Montrer que $A = \{x \in G \mid x^a = e_G\}$ et $B = \{x \in G \mid x^b = e_G\}$ sont des sous-groupes.
2. Montrer que $A \cap B = \{e_G\}$ et $AB = G$.

Sujet 3

Exercice 1 : Question de cours

Quels morphismes existe-il entre $(\mathcal{S}(E), \circ)$ et $(\{-1, 1\}, \times)$

Exercice 2

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$. On suppose que H est engendré par un nombre fini d'éléments.

Montrer que H est monogène.

Exercice 3

Soit G un groupe.
On suppose que $f : G \to G$ définie par $f(x) = x^3$ est un morphisme bijectif.

Montrer que G est abélien.