Sujet 1

Exercice 1 : Question de cours

On suppose que f et g sont convexes.
Montrer que $f+g$, $\max(f,g)$ et $x \mapsto f(\alpha x+\beta)$ sont convexes.

Exercice 2

Montrer que :

$$\forall x \geqslant 0, \forall n \in N, \quad x^{n+1}-(n+1)x+n \geqslant 0$$

Exercice 3

Montrer que $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x)=\ln(\ln x)$ est concave.

En déduire que : $\forall x, y > 1$, on a : $\ln \dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\ln x \ln y}$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée.

Montrer que f est constante.

Sujet 2

Exercice 1 : Question de cours

Énoncé et démonstration du théorème des pentes.

Exercice 2

1. Montrer que la fonction $x \mapsto x \ln x$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire que pour tous $x, y, a, b > 0$, on a l'inégalité :

$$x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b} \geqslant (x+y) \ln \frac{x+y}{a+b}$$

Exercice 3

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
On suppose que f est convexe et que g est convexe et croissante.

Montrer que $f \circ g$ est convexe.

Sujet 3

Exercice 1 : Question de cours

Que dire des variations d'une fonction convexe ?

Exercice 2

Soient a, b et c dans $[0, 1]$.

Montrer que : $$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \leqslant 2$$

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable, concave et vérifiant $f(0) \geqslant 0$.

Montrer que f vérifie :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$$